Интегрированные математические пакеты

Относительное орбитальное движение

Юдинцев В. В.

Самарский университет. Кафедра теоретической механики

Функции Module, Map, Subdivide, Apply, ListPlot, умножение матриц, замены

Относительное орбитальное движение

Рассматривается движение наноспутника по отношению к орбитальной станции, от которой он отделяется. Движение наноспутника относительно станции определяется в неинерциальной орбитальной системе координат, движущейся вместе с орбитальной станцией по круговой орбите известного радиуса. Начало системы координат расположено в центре масс станции. Ось Ox_o направлена от Земли вдоль радиус вектора центра масс станции. Ось Oy_o лежит в плоскости орбиты и направлена в сторону орбитальной скорости станции. Ось Oz_o дополняет систему координат до правой. В начальный момент времени - в момент отделения наноспутника - его координаты равны нулю, а проекции скорости на оси орбитальной системы координат определяются направлением и модулем скорости отделения.

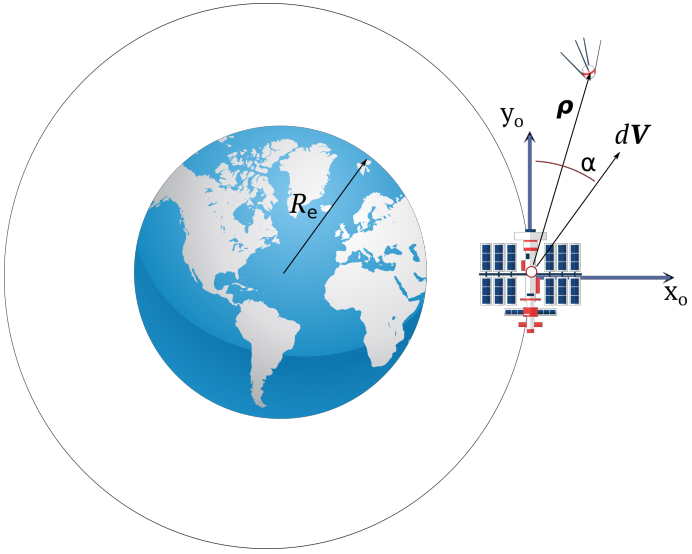


Рисунок 1 - Орбитальная подвижная система координат

Уравнения движения

Если расстояние между наноспутником и станцией мало в сравнении с радиусом орбиты станции, то движение спутника относительно станции описывается уравнением:

$$\boldsymbol{s}(t) = \begin{pmatrix} 4-3c & 0 & 0 & s/n & 2/n-2c/n & 0 \\ -6nt+6s & 1 & 0 & -2/n+2c/n & 4s/n-3t & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & s/n \\ 3ns & 0 & 0 & c & 2s & 0 \\ -6n+6nc & 0 & 0 & -2s & -3+4c & 0 \\ 0 & 0 & -ns & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \boldsymbol{s}(0)$$

где **s**(0) координатный столбец начального состояния спутника (в момент t=0), составленный из начальных координат (x_0, y_0, z_0) и проекций скорости спутника на оси орбитальной системы координат (Vx_0, Vy_0, Vz_0):

$$s(0) = (x_y, y_y, z_y, Vx_y, Vy_y, Vz_y)^T$$

n - угловая скорость орбитального движения станции по орбите, которая зависит от радиуса круговой орбиты станции r:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}$$

$\mu = 398\,600.448$ км^3/с^2 - гравитационный параметр Земли;

$s = \sin nt$;

$c = \cos nt$;

Функция, определяющая вектор состояния наноспутника в момент t по вектору начального состояния ***s***(0)

Уравнения движения

Используем функцию **Module** для формирования сложной функции, требующей многошаговых вычислений с промежуточными переменными.

Module[{список локальных переменных}, выражение 1; выражени 2; результат]

In[∘]:=
```
rv[r0_, v0_, n_, t_] := Module[
  (* Первый аргумент функции Module: объявление локальных переменных *)
  {c, s, A, xt},
  (* Второй аргумент - выражения, разделенные точкой с запятой.*)
  c = Cos[n t];
  s = Sin[n t];
```

$$A = \begin{pmatrix} 4-3c & 0 & 0 & s/n & 2/n-2c/n & 0 \\ -6nt+6s & 1 & 0 & -2/n+2c/n & 4s/n-3t & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & s/n \\ 3ns & 0 & 0 & c & 2s & 0 \\ -6n+6nc & 0 & 0 & -2s & -3+4c & 0 \\ 0 & 0 & -ns & 0 & 0 & c \end{pmatrix};$$

```
  xt = A.Flatten[{r0, v0}];
  (* Последнее выражение без закрывающей точки с запятой -- результат работы функции *)
  {xt[[1 ;; 3]], xt[[4 ;; 6]]}
 ];
```

```
Flatten[{1, 2, {11, 2}}]
```

Out[∘]=

```
{1, 2, 11, 2}
```

Движение одного спутника относительно станции

In[•]:=
```
p = {n → Sqrt[μ/r^3], r → Rz + h, Rz → 6371000.0, h → 450000 (* Высота орбиты 450 км *), μ → 398600.448 × 10^9 (* переводим в м^3/с^2*)};
```

Спутник отделяется вдоль вектора орбитальной скорости станции со скоростью 1 м/с

In[•]:=
```
sat1 = rv[{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, n, 100] //. p
```

Out[•]=
```
{{11.1955, 99.1632, 0}, {0.223675, 0.974906, 0}}
```

Спутник отделяется “вверх” со скоростью 1 м/с

In[•]:=
```
sat1 = rv[{0, 0, 0}, {1, 0, 0}, n, 100] //. p
```

Out[•]=
```
{{99.7908, -11.1955, 0}, {0.993727, -0.223675, 0}}
```

Движение одного спутника относительно станции

Для построения траектории движения разделим интервал одного орбитального периода станции на 20 интервалов

In[ ]:=
```
Subdivide[0, 2.0 π/n, 20] //. p
```

Out[ ]=
```
{0, 280.319, 560.639, 840.958, 1121.28, 1401.6, 1681.92, 1962.24, 2242.55, 2522.87,
 2803.19, 3083.51, 3363.83, 3644.15, 3924.47, 4204.79, 4485.11, 4765.43, 5045.75, 5326.07, 5606.39}
```

In[ ]:=
```
sat1 = rv[{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, n, #] & /@ Subdivide[0, 2.0 π/n, 20] //. p;
sat1 = Map[rv[{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, n, #] &, Subdivide[0, 2.0 π/n, 20]] //. p
```

Out[ ]=
```
{{{0, 0, 0}, {0, 1, 0}}, {{87.343, 261.966, 0.}, {0.618034, 0.804226, 0.}}, {{340.822, 415.97, 0.}, {1.17557, 0.236068, 0.}},
 {{735.625, 364.618, 0.}, {1.61803, -0.648859, 0.}}, {{1233.11, 30.6186, 0.}, {1.90211, -1.76393, 0.}},
 {{1784.57, -635.653, 0.}, {2., -3., 0.}}, {{2336.03, -1651.3, 0.}, {1.90211, -4.23607, 0.}},
 {{2833.51, -2999.21, 0.}, {1.61803, -5.35114, 0.}}, {{3228.31, -4629.78, 0.}, {1.17557, -6.23607, 0.}},
 {{3481.79, -6465.7, 0.}, {0.618034, -6.80423, 0.}}, {{3569.14, -8409.58, 0.}, {2.44929×10^-16, -7., 0.}},
 {{3481.79, -10353.5, 0.}, {-0.618034, -6.80423, 0.}}, {{3228.31, -12189.4, 0.}, {-1.17557, -6.23607, 0.}},
 {{2833.51, -13819.9, 0.}, {-1.61803, -5.35114, 0.}}, {{2336.03, -15167.9, 0.}, {-1.90211, -4.23607, 0.}},
 {{1784.57, -16183.5, 0.}, {-2., -3., 0.}}, {{1233.11, -16849.8, 0.}, {-1.90211, -1.76393, 0.}},
 {{735.625, -17183.8, 0.}, {-1.61803, -0.648859, 0.}}, {{340.822, -17235.1, 0.}, {-1.17557, 0.236068, 0.}},
 {{87.343, -17081.1, 0.}, {-0.618034, 0.804226, 0.}}, {{0., -16819.2, 0.}, {-4.89859×10^-16, 1., 0.}}}
```

Движение одного спутника относительно станции

Извлекаем только координаты

In[ ]:=
```
sat1[[ ;; , 1]] (* Результат - матрица 20x3 *)
```

Out[ ]=
```
{{0, 0, 0}, {87.343, 261.966, 0.}, {340.822, 415.97, 0.}, {735.625, 364.618, 0.}, {1233.11, 30.6186, 0.}, {1784.57, -635.653, 0.},
 {2336.03, -1651.3, 0.}, {2833.51, -2999.21, 0.}, {3228.31, -4629.78, 0.}, {3481.79, -6465.7, 0.}, {3569.14, -8409.58, 0.},
 {3481.79, -10353.5, 0.}, {3228.31, -12189.4, 0.}, {2833.51, -13819.9, 0.}, {2336.03, -15167.9, 0.}, {1784.57, -16183.5, 0.},
 {1233.11, -16849.8, 0.}, {735.625, -17183.8, 0.}, {340.822, -17235.1, 0.}, {87.343, -17081.1, 0.}, {0., -16819.2, 0.}}
```

Координаты x (весь первый столбец матрицы)

In[ ]:=
```
sat1[[ ;; , 1]][[ ;; , 1]]
```

Out[ ]=
```
{0, 87.343, 340.822, 735.625, 1233.11, 1784.57, 2336.03, 2833.51, 3228.31, 3481.79,
 3569.14, 3481.79, 3228.31, 2833.51, 2336.03, 1784.57, 1233.11, 735.625, 340.822, 87.343, 0.}
```

Траектория

Для построения графика “по точкам” функции ListPlot необходимо передать список пар координат
Все элементы столбцов 1 и 2

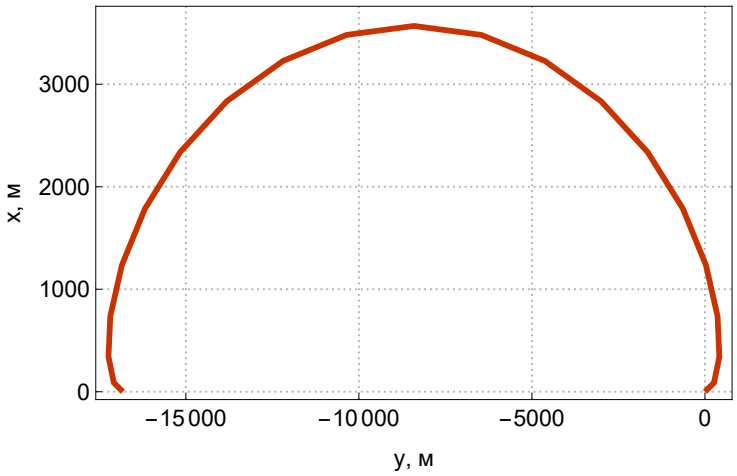
In[ ]:=
```
sat1[[ ;; , 1]][[ ;; , {1, 2}]]
```

Out[ ]=
```
{{0, 0}, {87.343, 261.966}, {340.822, 415.97}, {735.625, 364.618}, {1233.11, 30.6186}, {1784.57, -635.653},
 {2336.03, -1651.3}, {2833.51, -2999.21}, {3228.31, -4629.78}, {3481.79, -6465.7}, {3569.14, -8409.58},
 {3481.79, -10 353.5}, {3228.31, -12 189.4}, {2833.51, -13 819.9}, {2336.03, -15 167.9}, {1784.57, -16 183.5},
 {1233.11, -16 849.8}, {735.625, -17 183.8}, {340.822, -17 235.1}, {87.343, -17 081.1}, {0., -16 819.2}}
```

Поменяем порядок осей (x - вверх)

In[ ]:=
```
ListPlot[sat1[[ ;; , 1]][[ ;; , {2, 1}]], Joined → True,
 PlotTheme → {"Web", "FrameGrid"}, FrameLabel → {"y, м", "x, м"}, ImageSize → 500, BaseStyle → 12]
```

Out[ ]=



Движение двух спутников

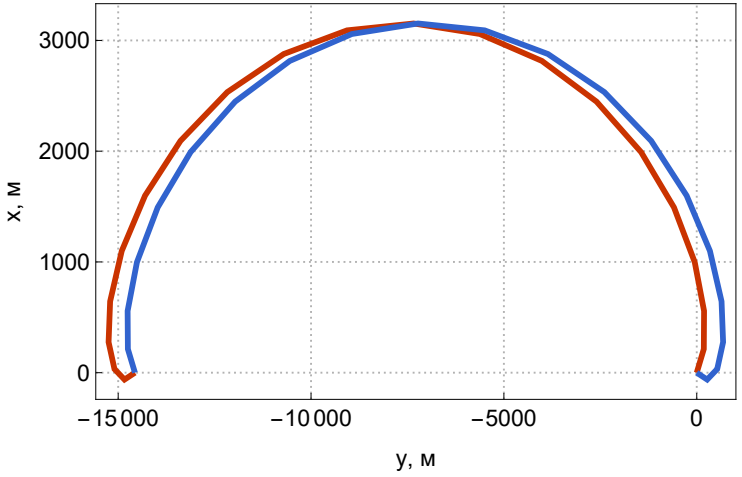
Пусть наноспутник №1 отделяется под углом $\alpha = 30\,°$ к направлению к оси Oy_o (рисунок 1) со скоростью 1 м/с, а наноспутник №2 под углом минус 30 ° к оси Oy_o с той же скоростью 1м/с. Необходимо построить траектории движения спутников относительно станции и график изменения расстояния между спутниками

In[ ]:=
```
ti = Subdivide[0, 2.0 π/n 1.0, 20] //. p;
```

In[ ]:=
```
sat1 = rv[{0, 0, 0}, 1 {Sin[30 °], Cos[30 °], 0}, n, #] & /@ ti //. p;
sat2 = rv[{0, 0, 0}, 1 {Sin[-30 °], Cos[-30 °], 0}, n, #] & /@ ti //. p;

ListPlot[{sat1[[ ;; , 1]][[ ;; , {2, 1}]], sat2[[ ;; , 1]][[ ;; , {2, 1}]]},
 Joined → True, PlotTheme → {"Web", "FrameGrid"}, FrameLabel → {"y, м", "x, м"}, ImageSize → 500, BaseStyle → 12]
```

Out[ ]=



Расстояние

Координаты

In[•]:=
```
sat1[[ ;; , 1]]
```

Out[•]=
```
{{0, 0, 0}, {213.507, 183.198, 0}, {557.396, 189.829, 0}, {998.007, -52.0441, 0}, {1492.21, -590.037, 0}, {1991.62, -1442.78, 0},
 {2447.37, -2598.08, 0}, {2814.83, -4014.15, 0}, {3058.04, -5623.66, 0}, {3153.19, -7340.36, 0}, {3090.96, -9067.48, 0},
 {2877.46, -10707.3, 0}, {2533.57, -12170.5, 0}, {2092.96, -13385.2, 0}, {1598.76, -14303.8, 0}, {1099.34, -14907.6, 0},
 {643.595, -15208.9, 0}, {276.134, -15249.4, 0}, {32.925, -15096.5, 0}, {-62.2242, -14836.4, 0}, {2.8698×10^-13, -14565.8, 0}}
```

Расстояния

In[•]:=
```
Map[Norm, sat1[[ ;; , 1]]]
```

Out[•]=
```
{0, 281.33, 588.834, 999.363, 1604.63, 2459.3, 3569.26, 4902.72, 6401.34, 7988.96,
 9579.83, 11087.2, 12431.4, 13547.8, 14392.8, 14948.1, 15222.5, 15251.9, 15096.5, 14836.5, 14565.8}
```

График изменения расстояния между спутником №1 и станцией. Формируем пары (время, расстояние)

In[•]:=
```
{ti, Map[Norm, sat1[[ ;; , 1]]]}
Transpose[%]
```

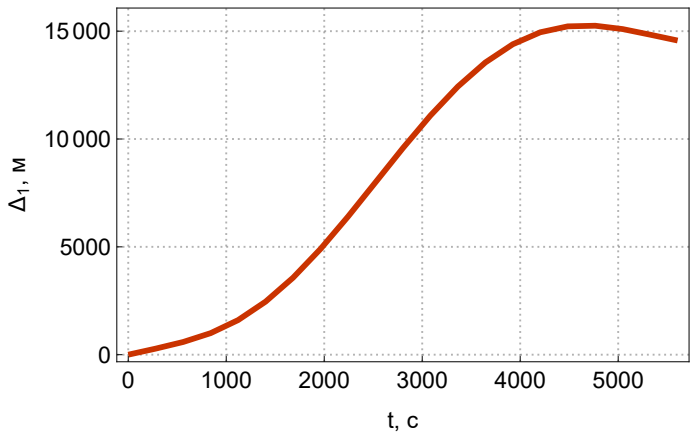
Out[•]=
```
{{0, 280.319, 560.639, 840.958, 1121.28, 1401.6, 1681.92, 1962.24, 2242.55, 2522.87,
  2803.19, 3083.51, 3363.83, 3644.15, 3924.47, 4204.79, 4485.11, 4765.43, 5045.75, 5326.07, 5606.39},
 {0, 281.33, 588.834, 999.363, 1604.63, 2459.3, 3569.26, 4902.72, 6401.34, 7988.96, 9579.83, 11087.2,
  12431.4, 13547.8, 14392.8, 14948.1, 15222.5, 15251.9, 15096.5, 14836.5, 14565.8}}
```

Out[•]=
```
{{0, 0}, {280.319, 281.33}, {560.639, 588.834}, {840.958, 999.363}, {1121.28, 1604.63}, {1401.6, 2459.3},
 {1681.92, 3569.26}, {1962.24, 4902.72}, {2242.55, 6401.34}, {2522.87, 7988.96}, {2803.19, 9579.83},
 {3083.51, 11087.2}, {3363.83, 12431.4}, {3644.15, 13547.8}, {3924.47, 14392.8}, {4204.79, 14948.1},
 {4485.11, 15222.5}, {4765.43, 15251.9}, {5045.75, 15096.5}, {5326.07, 14836.5}, {5606.39, 14565.8}}
```

Расстояние между спутником 1 и станцией

In[•]:=
```
Transpose[{ti, Map[Norm, sat1[[ ;; , 1]]]}];
ListPlot[%, Joined → True, PlotTheme → {"Web", "FrameGrid"}, FrameLabel → {"t, c", "Δ1, м"}, ImageSize → 500, BaseStyle → 12]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
sat1[[ ;; , 1]]
sat2[[ ;; , 1]]
```

Out[•]=

{{0, 0, 0}, {213.507, 183.198, 0}, {557.396, 189.829, 0}, {998.007, -52.0441, 0}, {1492.21, -590.037, 0}, {1991.62, -1442.78, 0}, {2447.37, -2598.08, 0}, {2814.83, -4014.15, 0}, {3058.04, -5623.66, 0}, {3153.19, -7340.36, 0}, {3090.96, -9067.48, 0}, {2877.46, -10707.3, 0}, {2533.57, -12170.5, 0}, {2092.96, -13385.2, 0}, {1598.76, -14303.8, 0}, {1099.34, -14907.6, 0}, {643.595, -15208.9, 0}, {276.134, -15249.4, 0}, {32.925, -15096.5, 0}, {-62.2242, -14836.4, 0}, {2.8698×10^{-13}, -14565.8, 0}}

Out[•]=

{{0, 0, 0}, {-62.2242, 270.541, 0}, {32.925, 530.652, 0}, {276.134, 683.581, 0}, {643.595, 643.07, 0}, {1099.34, 341.792, 0}, {1598.76, -262.05, 0}, {2092.96, -1180.64, 0}, {2533.57, -2395.35, 0}, {2877.46, -3858.56, 0}, {3090.96, -5498.34, 0}, {3153.19, -7225.46, 0}, {3058.04, -8942.16, 0}, {2814.83, -10551.7, 0}, {2447.37, -11967.7, 0}, {1991.62, -13123., 0}, {1492.21, -13975.8, 0}, {998.007, -14513.8, 0}, {557.396, -14755.6, 0}, {213.507, -14749., 0}, {-2.8698×10^{-13}, -14565.8, 0}}

Расстояние между спутниками

Из массива координат второго спутника вычитаем массив координат второго спутника

In[•]:=
```
sat2[[ ;; , 1]] - sat1[[ ;; , 1]]
(* Применяем функцию вычисления нормы к каждоум элементу результата предыдущей операции *)
{ti, Map[Norm, %]}
(* Транспонируем результат, чтобы получить пары {время, расстояние} *)
% // Transpose;
ListPlot[%, Joined → True, PlotTheme → {"Web", "FrameGrid"}, FrameLabel → {"t, c", "Δ12, м"}, ImageSize → 500, BaseStyle → 12]
```

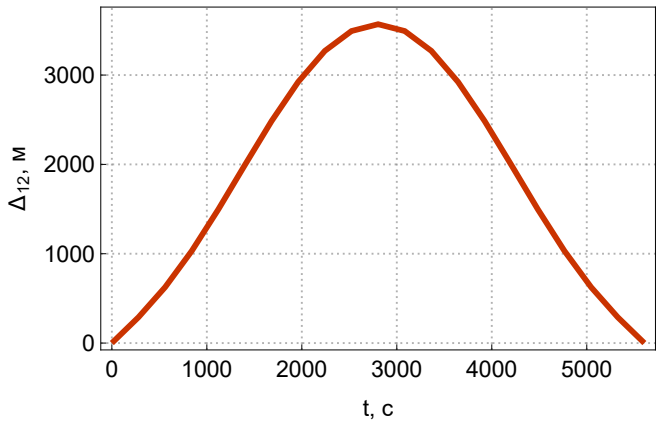
Out[•]=

{{0, 0, 0}, {-275.731, 87.343, 0}, {-524.471, 340.822, 0}, {-721.873, 735.625, 0}, {-848.613, 1233.11, 0}, {-892.284, 1784.57, 0}, {-848.613, 2336.03, 0}, {-721.873, 2833.51, 0}, {-524.471, 3228.31, 0}, {-275.731, 3481.79, 0}, {0., 3569.14, 0}, {275.731, 3481.79, 0}, {524.471, 3228.31, 0}, {721.873, 2833.51, 0}, {848.613, 2336.03, 0}, {892.284, 1784.57, 0}, {848.613, 1233.11, 0}, {721.873, 735.625, 0}, {524.471, 340.822, 0}, {275.731, 87.343, 0}, {-5.73961×10^{-13}, 0., 0}}

Out[•]=

{{0, 280.319, 560.639, 840.958, 1121.28, 1401.6, 1681.92, 1962.24, 2242.55, 2522.87, 2803.19, 3083.51, 3363.83, 3644.15, 3924.47, 4204.79, 4485.11, 4765.43, 5045.75, 5326.07, 5606.39},
{0, 289.234, 625.484, 1030.65, 1496.9, 1995.21, 2485.39, 2924.02, 3270.64, 3492.69, 3569.14, 3492.69, 3270.64, 2924.02, 2485.39, 1995.21, 1496.9, 1030.65, 625.484, 289.234, 5.73961×10^{-13}}}

Out[•]=



Много спутников

Запустим несколько спутников с одинаковыми скоростями под разными углами φ

In[ ]:=
```
φ = Range[0 °, 180 °, 60 °]
```

Out[ ]=

$$\{0, 60\,°, 120\,°, 180\,°\}$$

Проекции скорости каждого спутника на ОСК

In[ ]:=
```
1 {Sin[#], Cos[#], 0} & /@ φ
```

Out[ ]=

$$\left\{\{0, 1, 0\}, \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}, \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}, \{0, -1, 0\}\right\}$$

или

In[ ]:=
```
v0 = Map[1 {Sin[#], Cos[#], 0} &, φ]
```

Out[ ]=

$$\left\{\{0, 1, 0\}, \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}, \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}, \{0, -1, 0\}\right\}$$

In[ ]:=
```
sat1 = rv[{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, n, #] & /@ ti //. p;
```

In[ ]:=
```
sats = Map[  Function[v, rv[{0, 0, 0}, v, n, #] & /@ ti //. p] ,  v0];
```

In[ ]:=
```
Length[sats]
```

Out[ ]=

4

In[ ]:=
```
f[x_] := x^2;
f = #^2 &;
f = Function[x, x^2];
```

Положения второго спутника

In[•]:=
```
sats[[2]][[ ;; , 1]]
```

Out[•]=
```
{{0, 0, 0}, {282.462, 55.3417, 0}, {624.617, -87.1758, 0}, {992.973, -454.761, 0}, {1351.47, -1052.59, 0}, {1665.02, -1863.31, 0},
 {1902.94, -2848.71, 0}, {2041.92, -3953.5, 0}, {2068.36, -5110.69, 0}, {1979.69, -6248.17, 0}, {1784.57, -7295.75, 0},
 {1502.11, -8192.05, 0}, {1159.95, -8890.49, 0}, {791.595, -9363.87, 0}, {433.095, -9606.99, 0}, {119.543, -9637.23, 0},
 {-118.367, -9492.79, 0}, {-257.348, -9228.96, 0}, {-283.795, -8912.73, 0}, {-195.119, -8616.2, 0}, {4.97065×10^-13, -8409.58, 0}}
```

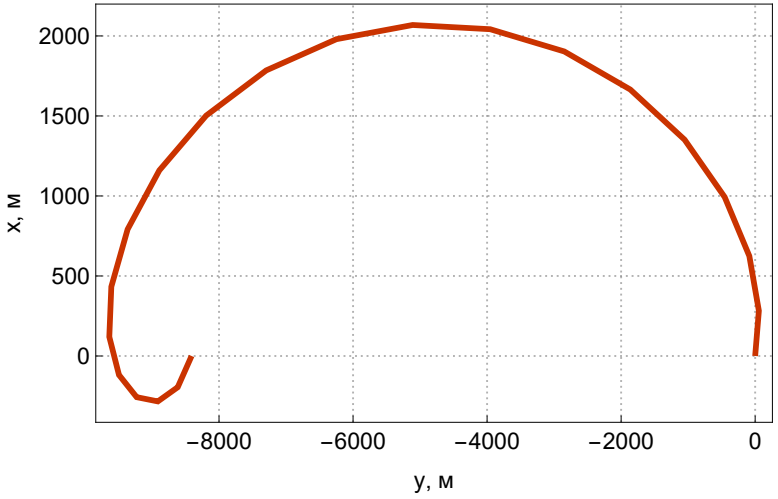
Настройки графика “по умолчанию”

In[•]:=
```
SetOptions[ListPlot, Joined → True, PlotTheme → {"Web", "FrameGrid"}, BaseStyle → 12];
```

Траектория второго спутника

In[•]:=
```
ListPlot[
 sats[[2]][[ ;; , 1]][[ ;; , {2, 1}]],
 FrameLabel → {"y, м", "x, м"}, ImageSize → 500]
```

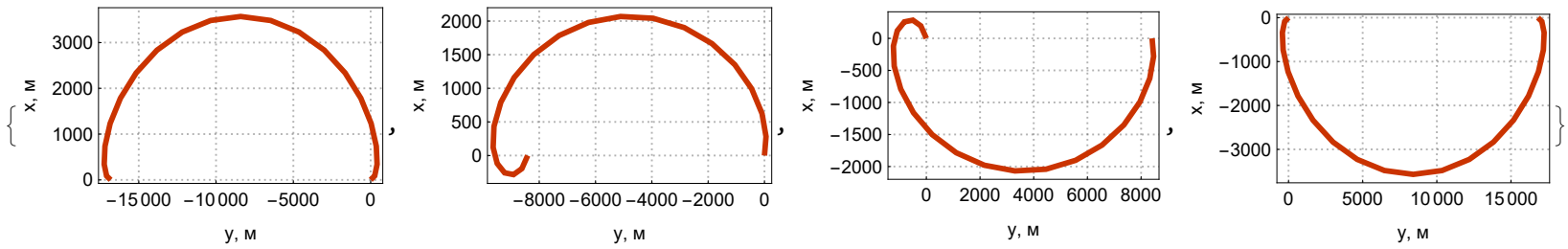
Out[•]=



Список графиков

In[•]:=
```
ListPlot[
  #[[ ;; , 1]][[ ;; , {2, 1}]], FrameLabel → {"y, м", "x, м"}, ImageSize → 200, BaseStyle → 10] & /@ sats
```

Out[•]=

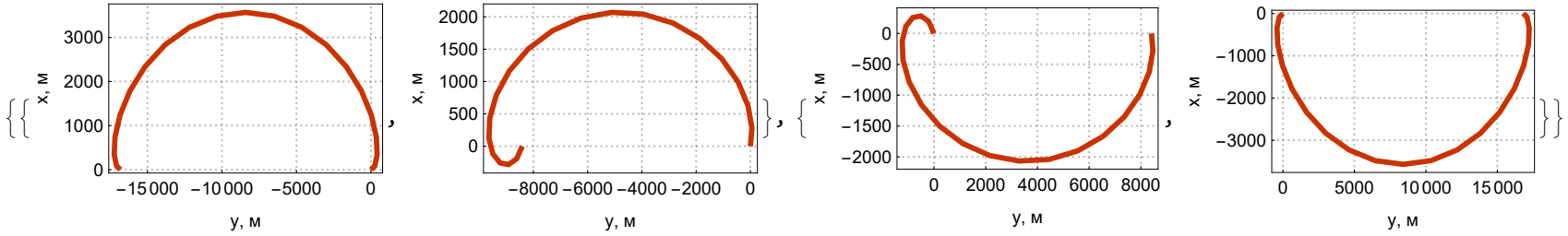


Список графиков

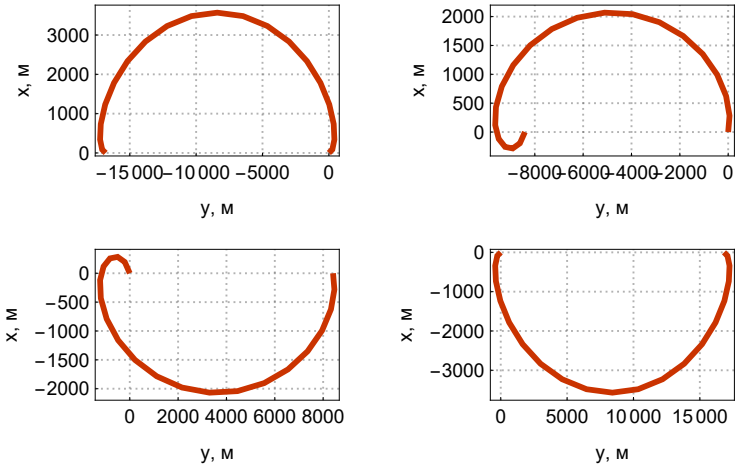
Используем функцию GraphicsGrid для объединения графиков в “блок”

In[∘]:=
```
ListPlot[
    #[[ ;; , 1]][[ ;; , {2, 1}]],
    FrameLabel → {"y, м", "x, м"}, ImageSize → 200, BaseStyle → 10] & /@ sats;
(* Разделяем список графиков на пары для формирования матрицы 2x2 *)
Partition[%, {2}]
GraphicsGrid[%]
```

Out[∘]=



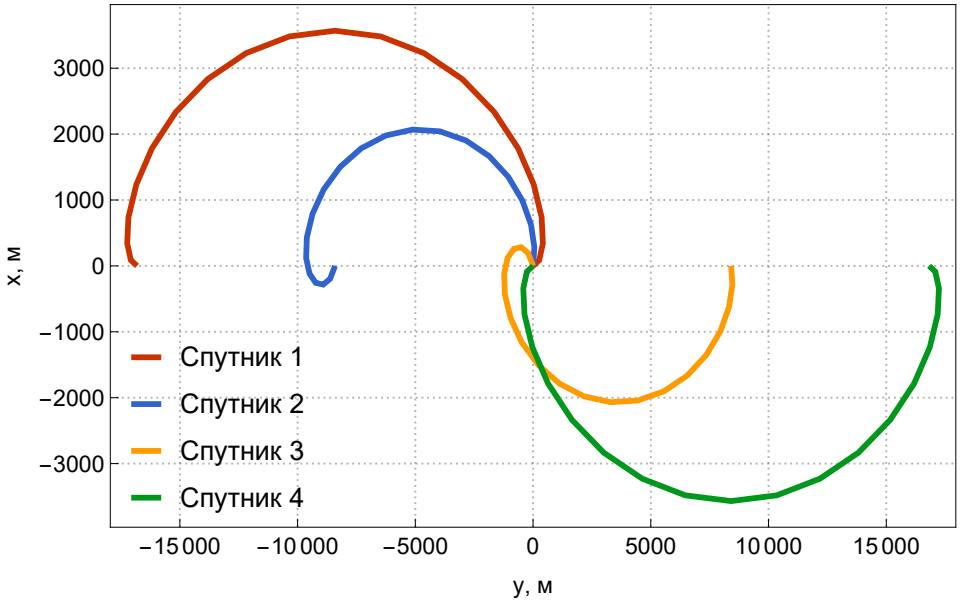
Out[∘]=



Все графики на одном рисунке

In[•]:=
```
Map[#[[ ;; , 1]][[ ;; , {2, 1}]] &, sats];
ListPlot[%, FrameLabel → {"y, м", "x, м"}, ImageSize → 500,
 PlotLegends → Placed["Спутник " <> ToString[#] & /@ Range[Length[sats]], {Left, Bottom}]]
```

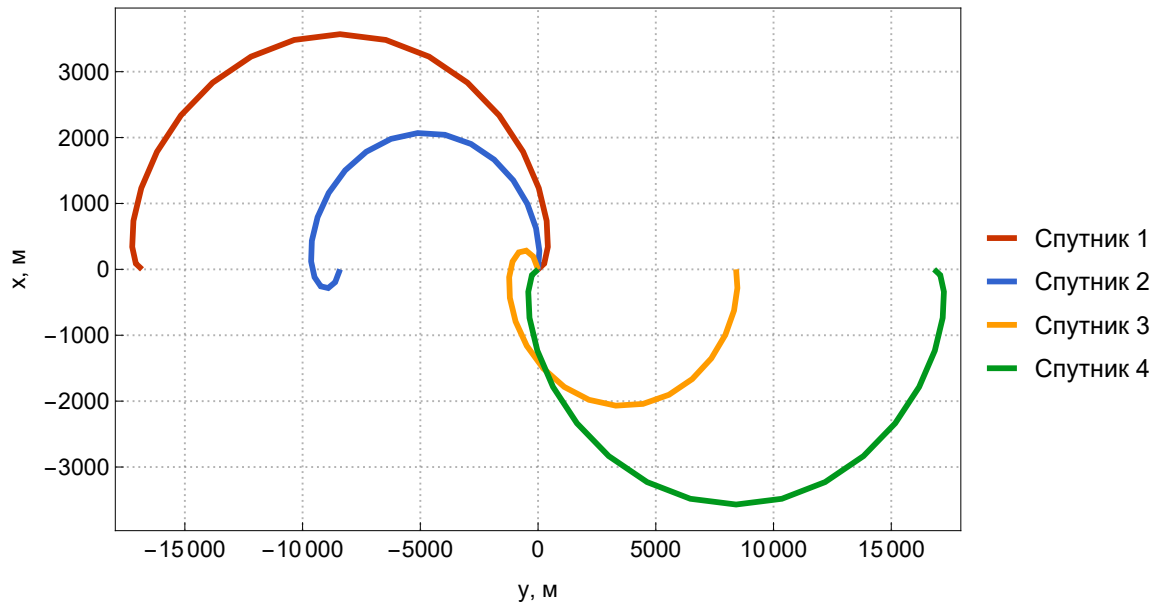
Out[•]=



Все графики на одном рисунке

In[•]:=
```
Map[#[[ ;; , 1]][[ ;; , {2, 1}]] &, sats];
ListPlot[%, FrameLabel → {"y, м", "x, м"}, ImageSize → 500, PlotLegends → ("Спутник " <> ToString[#] & /@ Range[Length[sats]])]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
"Спутник " <> ToString[#] & /@ Range[Length[sats]]
```

Out[•]=

{Спутник 1, Спутник 2, Спутник 3, Спутник 4}

Расстояния между спутниками

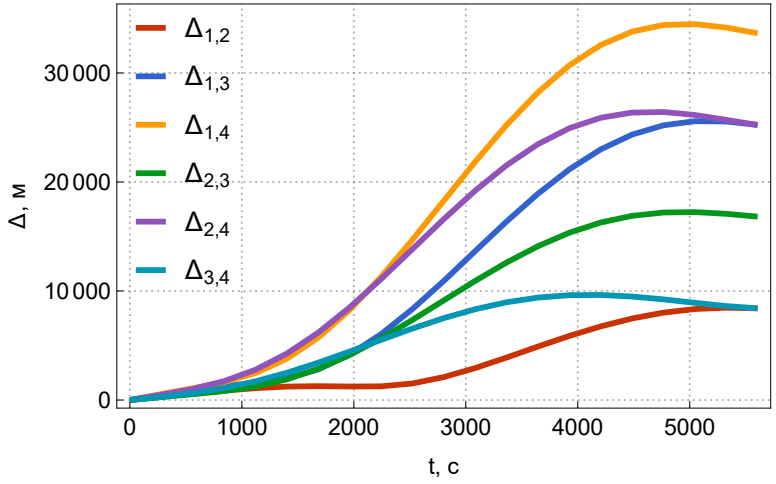
In[ ]:=
```
Subsets[{1, 2, 3}, {2}]
```

Out[ ]=
```
{{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}}
```

In[ ]:=
```
pairs = Subsets[Range[Length[sats]], {2}]
```

Out[ ]=
```
{{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}}
```

Массивы разностей радиус-векторов всех пар спутников

In[ ]:=
```
sats⟦#⟦1⟧⟧⟦ ;; , 1⟧ - sats⟦#⟦2⟧⟧⟦ ;; , 1⟧ & /@ pairs;
(* или так *)
Apply[sats⟦#1⟧⟦ ;; , 1⟧ - sats⟦#2⟧⟦ ;; , 1⟧ &, pairs, {1}];
(* или так (яснее) *)
dr[isat_, jsat_] := sats⟦isat⟧⟦ ;; , 1⟧ - sats⟦jsat⟧⟦ ;; , 1⟧;
Apply[dr[#1, #2] &, pairs, {1}];
(* dr12, dr13, dr14, .... *)
(* От каждого элемента разницы берем модуль *)
Map[Function[dr, Norm[dr]], #] & /@ %;
(* Присоединяем к каждому массиву расстояний (6 штук) список моментов времени и транспонируем для создания пар *)
Transpose[{ti, #}] & /@ %;
ListPlot[%, FrameLabel → {"t, c", "Δ, м"}, ImageSize → 500, PlotLegends → Placed[Δ#⟦1⟧,#⟦2⟧ & /@ pairs, {Left, Top}]]
```

Out[ ]=