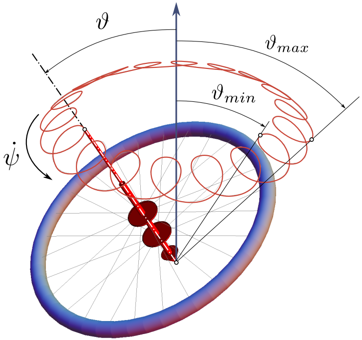
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С. П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Кафедра теоретической механики

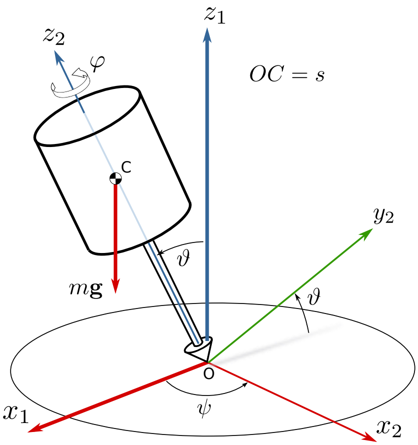
Движение осесимметричного твёрдого тела с неподвижной точкой под действием силы тяжести
Случай Лагранжа

курс “Динамика твёрдого тела и систем тел”



Юдинцев В. В. yudintsev@termech.ru

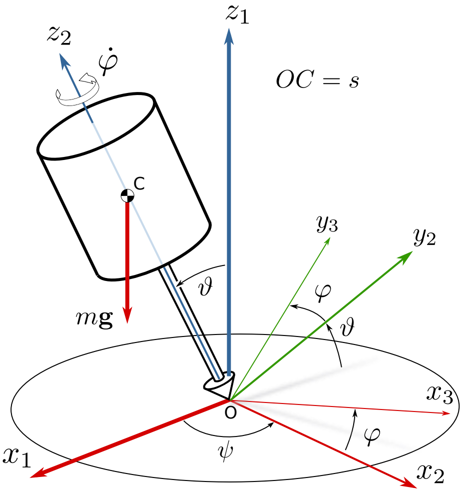
Свойства тела и внешние условия [1]



Осесимметричное тело вращается вокруг неподвижной точки O, расположенной на оси симметрии тела z_2:

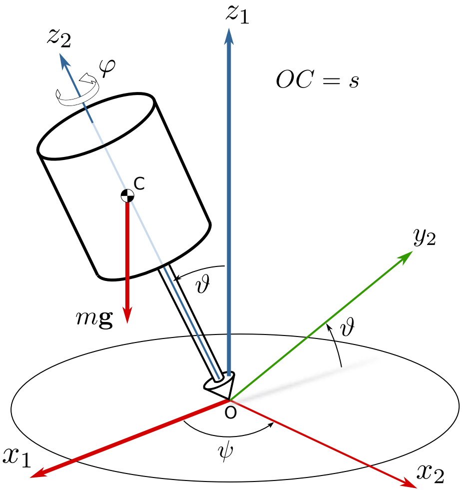
- поперечные моменты инерции равны $J_x = J_y \neq J_z$;
- центр масс C находится на оси симметрии и смещен от точки опоры O на расстояние $OC = s$.

Неподвижный, полуподвижный и связанный базисы



- Неподвижный базис $\mathbf{e}^{(1)}$: $Ox_1y_1z_1$
- Полуподвижный базис $\mathbf{e}^{(2)}$: $Ox_2y_2z_2$, повернутый относительно $Ox_1y_1z_1$ на углы ψ, ϑ
- Связанный с телом базис $\mathbf{e}^{(3)}$: $Ox_3y_3z_3$, повернутый относительно $Ox_1y_1z_1$ на углы ψ, ϑ, φ

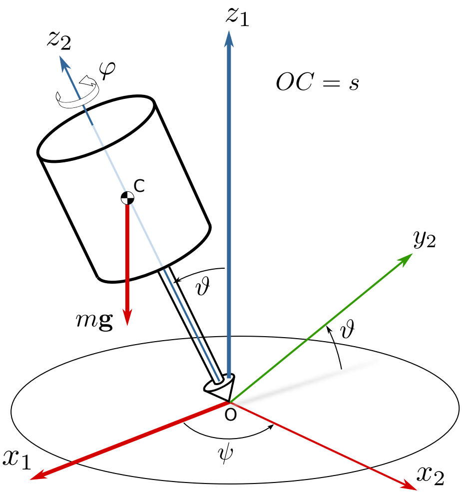
Теорема об изменении момента количества движения



Абсолютная производная момента количества движения относительно неподвижного полюса O равна главному моменту внешних сил относительно полюса O [1]:

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{M}_O \tag{1}$$

Производная вектора кинетического момента



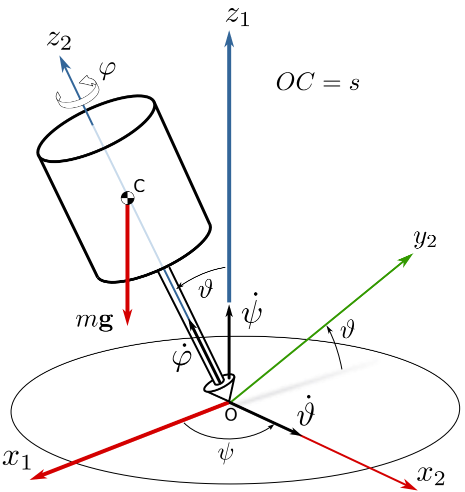
Абсолютная производная вектора кинетического момента относительно точки опоры:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_O = \frac{\tilde{d}^{(2)}\mathbf{L}_O}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_O} \qquad (2)$$

где:

- $\boldsymbol{\Omega}$ – абсолютная угловая скорость базиса $\mathbf{e}^{(2)}$;
- $\tilde{d}^{(2)}\mathbf{L}_O/dt$ – локальная производная $\mathbf{L}_O$ в базисе $\mathbf{e}^{(2)}$.

Координаты векторов $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{M}_O$ и $\boldsymbol{\Omega}$ в базисе $\mathbf{e}^{(2)}$



$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_O =& J_x\boldsymbol{\omega}_x + J_x\boldsymbol{\omega}_y + J_z\boldsymbol{\omega}_z = \\
& + J_x\dot\vartheta\,\mathbf{e}_1^{(2)} \\
& + J_x\dot\psi\sin\vartheta\,\mathbf{e}_2^{(2)} \\
& + J_z(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta)\,\mathbf{e}_3^{(2)} \\
\boldsymbol{\Omega} =& + \dot\vartheta\,\mathbf{e}_1^{(2)} \\
& + \dot\psi\sin\vartheta\,\mathbf{e}_2^{(2)} \\
& + \dot\psi\cos\vartheta\,\mathbf{e}_3^{(2)} \\
\mathbf{M}_O =& \, mgs\sin\vartheta\,\mathbf{e}_1^{(2)}
\end{aligned}
$$

Уравнения движения

Векторная форма:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_O = \frac{\tilde{d}^{(2)}\mathbf{L}_O}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O} \tag{3}$$

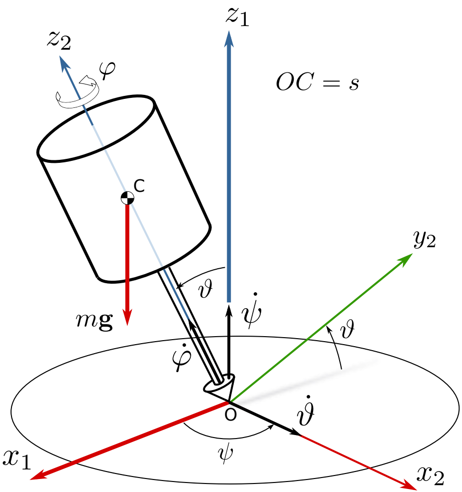
Скалярная форма:

$$\boxed{\begin{cases} J_x\ddot{\vartheta} + [J_z(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) - J_x\dot{\psi}\cos\vartheta]\dot{\psi}\sin\vartheta - mgs\sin\vartheta & = 0 \\ J_x\ddot{\psi}\sin\vartheta + 2J_x\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - J_z\dot{\vartheta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) & = 0 \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta & = 0 \end{cases}} \tag{4}$$

$L_{z_2} = \text{const}$

$$
\begin{aligned}
J_x\ddot{\vartheta} + [J_z(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) - J_x\dot{\psi}\cos\vartheta]\dot{\psi}\sin\vartheta - mgs\sin\vartheta &= 0\\
J_x\ddot{\psi}\sin\vartheta + 2J_x\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - J_z\dot{\vartheta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) &= 0\\
\underbrace{\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta}_{\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta)=\dot{\omega}_z} &= 0
\end{aligned}
$$

$L_{z_2} = \text{const}$



$$\boxed{\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta = \omega_z = const} \qquad (5)$$

Проекция вектора кинетического момента на направление оси симметрии тела постоянна:

$$L_{z_2} = \text{const} \qquad (6)$$

Интеграл (5) следует также из уравнения:

$$J_z\dot\omega_z - (J_x - J_x)\omega_y\omega_x = M_{z_2} = 0$$

Уравнения движения

После подстановки $\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta = \omega_z$ в уравнения:

$$\begin{aligned} J_x\ddot{\vartheta} + [J_z(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) - J_x\dot{\psi}\cos\vartheta]\dot{\psi}\sin\vartheta - mgs\sin\vartheta &= 0, \\ J_x\ddot{\psi}\sin\vartheta + 2J_x\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - J_z\dot{\vartheta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) &= 0, \end{aligned}$$

получим уравнения движения:

$$\begin{aligned} J_x\ddot{\vartheta} + (J_z\omega_z - J_x\dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\psi}\sin\vartheta - mgs\sin\vartheta &= 0, \\ J_x\ddot{\psi}\sin\vartheta + 2J_x\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - J_z\omega_z\dot{\vartheta} &= 0. \end{aligned}$$

$L_{z_1} = \text{const}$

После умножения второго уравнения системы

$$J_x\ddot{\vartheta} + (J_z\omega_z - J_x\dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\psi}\sin\vartheta - mgs\sin\vartheta = 0 \qquad (7)$$

$$J_x\ddot{\psi}\sin\vartheta + 2J_x\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - J_z\omega_z\dot{\vartheta} = 0 \qquad \cdot\sin\vartheta \qquad (8)$$

на $\sin\vartheta$, получим:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(J_x\dot{\psi}\sin^2\vartheta + J_z\omega_z\cos\vartheta\right) = 0}$$

Проекция вектора кинетического момента на направление вертикали z_1 постоянна:

$$\boxed{J_x\dot{\psi}\sin^2\vartheta + J_z\omega_z\cos\vartheta = L = \text{const}},$$

т. к. линии действия сил, действующих на тело, или параллельны оси z_1 или пересекают эту ось.

Интеграл энергии

Уравнения движения

$$J_x\ddot{\vartheta} + (J_z\omega_z - J_x\dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\psi}\sin\vartheta - mgs\sin\vartheta = 0 \qquad \cdot\,\dot{\vartheta} \tag{9}$$

$$J_x\ddot{\psi}\sin\vartheta + 2J_x\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - J_z\omega_z\dot{\vartheta} = 0 \qquad \cdot\,\dot{\psi}\sin\vartheta \tag{10}$$

Умножим уравнение (9) на $\dot{\vartheta}$ и сложим результат с уравнением (10), умноженным на $\dot{\psi}\sin\vartheta$:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{J_x(\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2)}{2} + mgs\cos\vartheta\right] = 0}$$

Интеграл энергии

$$\boxed{\frac{J_x(\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2)}{2} + mgs\cos\vartheta = const = E - \frac{J_z\omega_z^2}{2}}$$

или

$$J_x(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z\omega_z^2 + 2mgs\cos\vartheta = 2E.$$

Плоское движение маятника

Если проекция угловой скорости на ось z_2 равна нулю $\omega_z = 0$, то:

- изменяется только координата ϑ

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\psi} = 0;$$

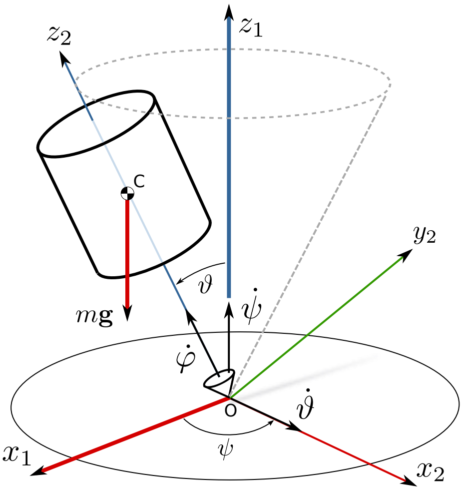
- уравнения движения принимают вид:

$$\boxed{J_x \ddot{\vartheta} - 2mgs \sin\vartheta = 0}$$

- интеграл энергии:

$$\boxed{J_x \dot{\vartheta}^2 + 2mgs \cos\vartheta = 2E = \text{const}}$$

Регулярная прецессия



Регулярная прецессия – движение с постоянной величиной угла нутации $\vartheta = const$.

- Из уравнений движения и интеграла

$$\dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta = \omega_z = const$$

следует, что

$$\dot\psi = const, \ \dot\varphi = const.$$

- Ось симметрии тела описывает конус с вертикальной осью z_1

Регулярная прецессия

При $\ddot{\vartheta} = 0$ уравнение

$$J_x\ddot{\vartheta} + (J_z\omega_z - J_x\dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\psi}\sin\vartheta - mgs\sin\vartheta = 0$$

принимает вид квадратного уравнения относительно $\dot{\psi}$ $(\sin\vartheta \neq 0)$:

$$\dot{\psi}^2 J_x\cos\vartheta - \dot{\psi}J_z\omega_z + mgs = 0,$$

с решениями

$$\dot{\psi}_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{J_z\omega_z}{2J_x\cos\vartheta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{4J_x mgs\cos\vartheta_0}{J_z^2\omega_z^2}}\right), & \text{если } \cos\vartheta_0 \neq 0 \\ \dfrac{mgs}{J_z\omega_z}, & \text{если } \cos\vartheta_0 = 0 \end{cases}$$

Регулярная прецессия: $\cos\vartheta_0 = 0$

$\cos\vartheta_0 = 0$

$$\dot{\psi} = \frac{mgs}{J_z \omega_z}$$

Регулярная прецессия: $\cos\vartheta_0 < 0$

$\cos\vartheta_0 < 0$

$$\dot\psi_{1,2} = \frac{J_z\omega_z}{2J_x\cos\vartheta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4J_x mgs\cos\vartheta_0}{J_z^2\omega_z^2}}\right)$$

Корни $\dot\psi_1, \dot\psi_2$ положительные для любых значений $\vartheta = \vartheta_0$

Регулярная прецессия: $\cos\vartheta_0 > 0$

$\cos\vartheta_0 > 0$

$$\dot{\psi}_{1,2} = \frac{J_z\omega_z}{2J_x\cos\vartheta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4J_x mgs\cos\vartheta_0}{J_z^2\omega_z^2}}\right)$$

Регулярная прецессия возможно только для достаточно больших значений ω_z, при которых подкоренное выражение положительно:

$$1 - \frac{4J_x mgs\cos\vartheta_0}{J_z^2\omega_z^2} > 0$$

Общее решение

1. Из второго интеграла:

$$J_x\dot{\psi}\sin^2\vartheta + J_z\omega_z\cos\vartheta = L$$

выразим $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = \frac{L - J_z\omega_z\cos\vartheta}{J_x\sin^2\vartheta}.$$

2. Подставив $\dot{\psi}$ в интеграл энергии, получим дифференциальное уравнение для ϑ:

$$\boxed{J_x\dot{\vartheta}^2 = 2E - J_z\omega_z^2 - 2mgs\cos\vartheta - \frac{(L - J_z\omega_z\cos\vartheta)^2}{J_x\sin^2\vartheta}} \qquad (11)$$

Общее решение

3. Замена переменных:

$$u = \cos\vartheta,\ \dot{u} = -\dot{\vartheta}\sin\vartheta. \tag{12}$$

4. Уравнение движения для ϑ:

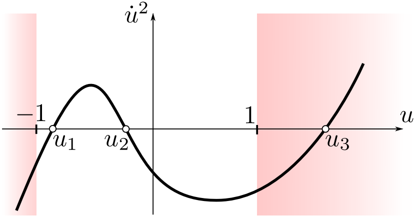
$$J_x\dot{\vartheta}^2 = 2E - J_z\omega_z^2 - 2mgs\cos\vartheta - \frac{(L - J_z\omega_z\cos\vartheta)^2}{J_x\sin^2\vartheta}.$$

5. Уравнение движения для u:

$$\dot{u}^2 = \underbrace{\frac{(2E - J_z\omega_z^2 - 2mgsu)(1-u^2)}{J_x} - \frac{(L - J_y\omega_z u)^2}{J_x^2}}_{\text{полином 3 степени от } u} \tag{13}$$

Корни полинома правой части уравнения (13)

$$\boxed{\dot{u}^2 = \frac{(2E - J_z\omega_z^2 - 2mgsu)(1-u^2)}{J_x} - \frac{(L - J_z\omega_z u)^2}{J_x^2}}$$



- при $u = \pm 1$ правая часть принимает отрицательные значения,
- при $u \to \infty$, правая часть бесконечно возрастает.

- Существует 1 вещественный корень $u_3 > 1$
- На интервале $[-1; 1]$ существует или два вещественных корня или или один двойной вещественный u_2, u_3.

Общее решение

6. Располагая корни полинома $u_1 \leq u_2 < u_3$ приведем уравнение

$$\dot{u}^2 = \frac{(2E - J_z\omega_z^2 - 2mgsu)(1-u^2)}{J_x} - \frac{(L - J_y\omega_z u)^2}{J_x^2}$$

к виду

$$\dot{u}^2 = \frac{2mgs}{J_x}(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \tag{14}$$

Общее решение

$$\dot{u}^2 = \frac{2mgs}{J_x}(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$$

7. Выполняя замену переменных

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)v^2, \tag{15}$$

получим уравнение

$$\boxed{\dot{v}^2 = \frac{mgs}{2J_x}(u_3-u_1)(1-v^2)(1-k^2v^2)} \tag{16}$$

где

$$0 \le k^2 = \frac{u_2-u_1}{u_3-u_1} \le 1$$

Общее решение

Получено дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\boxed{\dot{v}^2 = \frac{mgs}{2J_x}(u_3 - u_1)(1 - v^2)(1 - k^2v^2)} \tag{17}$$

Решение уравнения записывается при помощи эллиптического интеграла 1-го рода

$$\int_{v_0}^{v} = \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2v^2)}} = (t - t_0)\sqrt{\frac{(u_3 - u_1)mgs}{2J_x}} = \tau \Rightarrow \tag{18}$$

$$\boxed{v = \mathrm{sn}\ \tau}$$

Решение для угла ϑ

Решение для угла ϑ имеет вид:

$$\boxed{\cos\vartheta = \cos\vartheta_1 + (\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1)\mathsf{sn}^2\tau} \tag{19}$$

Постоянные ϑ_1, ϑ_2 определяют минимальное и максимальное значение ϑ и вычисляются следующим образом:

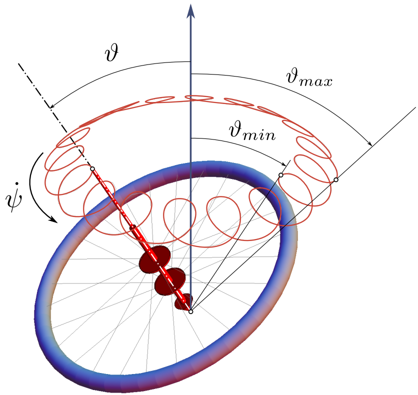
$$\cos\vartheta_1 = u_1,\ \cos\vartheta_2 = u_2 \tag{20}$$

Решения для углов ψ и φ

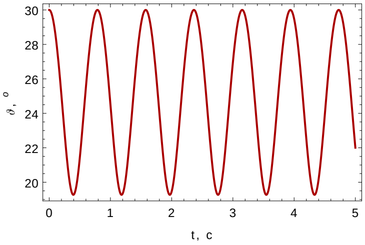
$$\boxed{\dot{\psi} = \frac{L - J_z\omega_z\cos\vartheta}{J_x(1-\cos^2\vartheta)}} \tag{21}$$

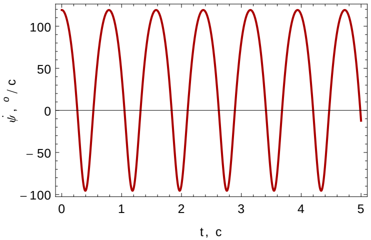
$$\boxed{\dot{\varphi} = \omega_z - \dot{\psi}\cos\vartheta} \tag{22}$$

Пример 1

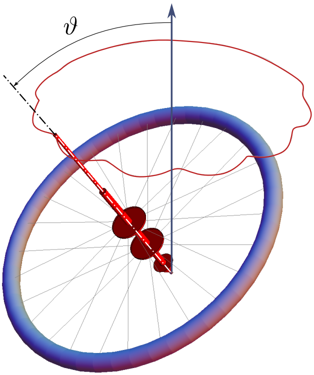


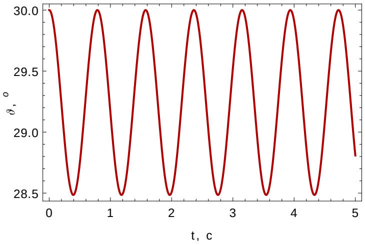
$$J_x = J_y = 1, J_z = 3, m = 1, g = 10,$$
$$s = 0.5, \omega_z = 3, \vartheta_0 = \pi/6, \dot\psi = 2.$$

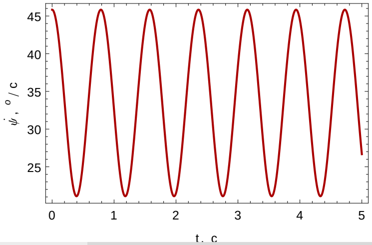




Пример 2







$$J_x = J_y = 1, J_z = 3, m = 1, g = 10,$$
$$s = 0.5, \omega_z = 3, \vartheta_0 = \pi/6, \dot{\psi} = 0.8.$$

Список использованных источников

Й. Виттенбург.
Динамика систем твердых тел.
Мир, М., 1980.