Углы Эйлера

Динамика твёрдого тела и систем твёрдых тел

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики
Самарский университет

11 ноября 2019 г.

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Плоские повороты

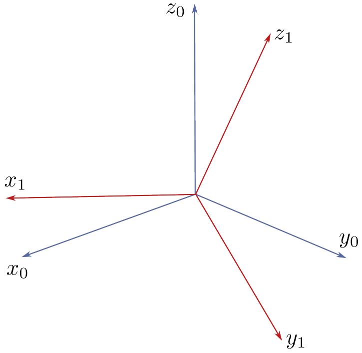
Теорема о трёх плоских поворотах

Теорема

Любое положение твёрдого тела может быть получено тремя последовательными плоскими поворотами из любого начального положения.

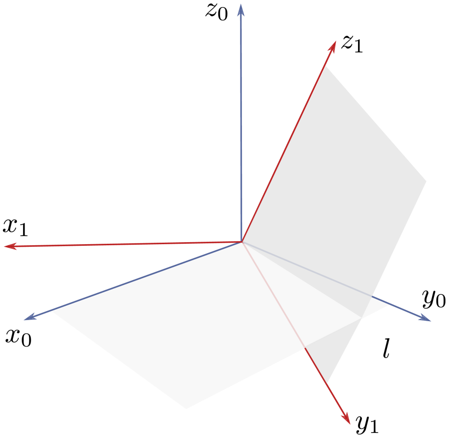
Доказательство (X-Y-Z) [1]

- Рассмотрим два произвольно ориентированных базиса $x_0y_0z_0$ и $x_1y_1z_1$



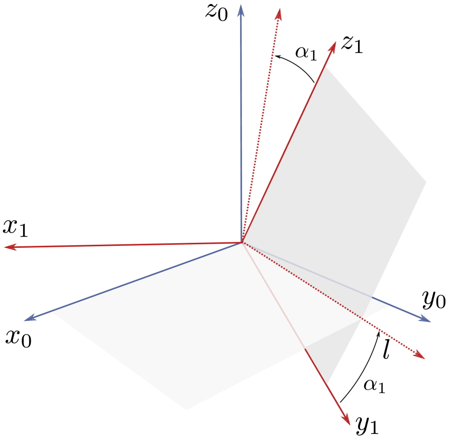
Доказательство (X-Y-Z)

- Плоскости $y_1 z_1$ и $x_0 y_0$ пересекаются по прямой l



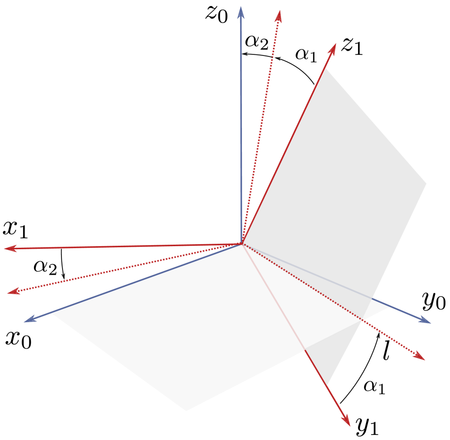
Доказательство (X-Y-Z)

- 1 поворот: вращение вокруг оси x_1 до совмещения y_1 с плоскостью x_0y_0



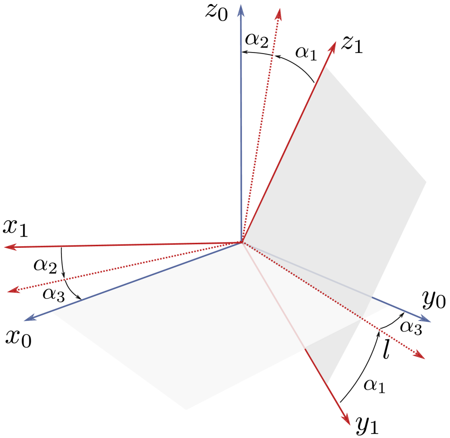
Доказательство (X-Y-Z)

- 2 поворот: вращение вокруг оси l до совмещения прямой z_1 с z_0



Доказательство (X-Y-Z)

- 3 поворот: вращение вокруг оси z_1 до совмещения прямой x_1 с x_0 и y_1 с y_0



Углы Эйлера

Углы Эйлера

- ψ - угол прецессии,
- θ - угол нутации,
- φ - угол собственного вращения.

https://www.youtube.com/watch?v=tmtGEHTBSdQ

Преобразование $\psi, \theta, \varphi \to \mathbf{A}$

Матрицы элементарных поворотов

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Преобразование $\psi, \theta, \varphi \to \mathbf{A}$

Перемножая матрицы элементарных поворотов в прямом порядке и транспонируя результат (пассивная точка зрения), получим матрицу преобразования координат из неподвижного базиса в подвижный:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\varphi)^T = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\psi - c_\theta s_\varphi s_\psi & c_\theta c_\psi s_\varphi + c_\varphi s_\psi & s_\theta s_\varphi \\ -c_\psi s_\varphi - c_\theta c_\varphi s_\psi & c_\theta c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\theta s_\psi & -c_\psi s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}$$

Преобразование $\mathrm{A} \to \psi, \theta, \varphi$ [2]

Если известна матрица направляющих косинусов, то углы Эйлера можно определить следующим образом:

$$\cos\theta = a_{33}, \qquad \sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}, \tag{4}$$

$$\cos\psi = -\frac{a_{32}}{\sin\theta}, \qquad \sin\psi = \frac{a_{31}}{\sin\theta}, \tag{5}$$

$$\cos\varphi = \frac{a_{23}}{\sin\theta}, \qquad \sin\varphi = \frac{a_{13}}{\sin\theta}. \tag{6}$$

Особые положения

https://www.youtube.com/watch?v=KIfAxRNj-7s

- При $\theta = 0$ первый и третий поворот происходят вокруг одного и того же направления.
- Одному положению тела соответствует множество значений углов ψ и φ для которых выполняется условие:

$$\varphi + \psi = \alpha.$$

Матрица поворота

- При $\theta = 0$:

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_\varphi\right)^T = \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \psi) & \sin(\varphi + \psi) & 0 \\ -\sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

- Множеству положений твердого тела $\theta = 0$, $\varphi + \psi = \alpha$ соответствует одна и та же матрица поворота.

Другие последовательности поворотов

Углы конечного вращения I-го рода (углы Эйлера)

- 3-1-3;
- 1-2-1;
- 2-3-2;
- 3-2-3;
- 1-3-1;
- 2-1-2.

Углы конечного вращения II-го рода (углы Брайнта)

- 1-2-3;
- 2-3-1;
- 3-1-2;
- 1-3-2;
- 3-2-1;
- 2-1-3.

Углы Брайнта

Определение углов Брайнта (Крылова)

https://www.youtube.com/watch?v=-W4mkUPxxQs

Угловое положение базиса $Cx_1y_1z_1$ задается тремя последовательными плоскими поворотами:

1. вращение вокруг оси x_1;
2. вращение вокруг новой оси y_1;
3. вращение вокруг новой оси z_1.

Углы Брайнта используется в авиации и космонавтике: "рыскание", "тангаж", "крен"

Матрицы элементарных поворотов

Матрицы элементарных поворотов в “поворачиваемых” базисах (пассивная точка зрения)

$$A_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Углы Брайнта $\to$ Матрица поворота

- Перемножая матрицы элементарных поворотов в прямом порядке и транспонируя результат (пассивная точка зрения), получим матрицу преобразования координат из неподвижного базиса в подвижный:

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\varphi\right)^T = \begin{bmatrix} c_\theta c_\varphi & c_\psi s_\varphi + c_\varphi s_\theta s_\psi & s_\varphi s_\psi - c_\varphi c_\psi s_\theta \\ -c_\theta s_\varphi & c_\varphi c_\psi - s_\theta s_\varphi s_\psi & c_\psi s_\theta s_\varphi + c_\varphi s_\psi \\ s_\theta & -c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}.$$

- Для малых углов (в линейном приближении):

$$\mathbf{A} \approx \begin{bmatrix} 1 & \varphi & -\theta \\ -\varphi & 1 & \psi \\ \theta & -\psi & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица поворота $\rightarrow$ Углы Брайнта

$$\sin\theta = a_{31}, \qquad \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}, \tag{11}$$

$$\sin\psi = -\frac{a_{32}}{\cos\theta}, \qquad \cos\psi = \frac{a_{33}}{\cos\theta}, \tag{12}$$

$$\sin\varphi = -\frac{a_{21}}{\cos\theta}, \qquad \cos\varphi = \frac{a_{11}}{\cos\theta}. \tag{13}$$

Особые положения

- При $\theta = \pi/2$ первый и третий поворот происходят вокруг одного и того же направления.
- Одному положению тела соответствует множество значений углов ψ и φ для которых выполняется условие:

$$\varphi + \psi = \alpha.$$

https://www.youtube.com/watch?v=9oZY6z6gank

Матрица поворота при $\theta = \pi/2$

- При $\theta = \pi/2$:

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}_{\psi}\mathbf{A}_{\pi/2}\mathbf{A}_{\varphi}\right)^T == \begin{bmatrix} 0 & \sin(\varphi+\psi) & -\cos(\varphi+\psi) \\ 0 & \cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Множеству положений твердого тела $\theta = 0$, $\varphi + \psi = \alpha$ соответствует одна и та же матрица поворота.

Список использованных источников

- В. Ф. Журавлев.
  Основы теоретической механики.
  Издательство физико-математической литературы, Москва, 2001.
- Jens Wittenburg and P. Likins.
  Dynamics of Systems of Rigid Bodies, volume 45.
  Teubner, 1978.