Структура механической системы

Динамика твёрдого тела и систем твёрдых тел

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики

27 февраля 2019 г.

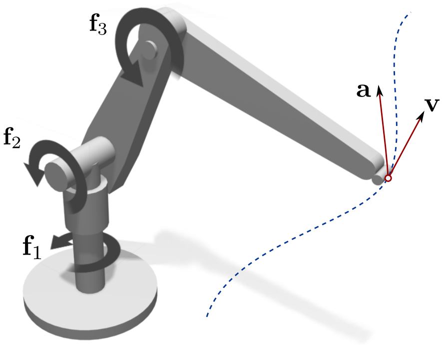
САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Системы тел

Системы тел

- Системы раскрытия солнечных батарей, антенн, радиаторов, ...
- Системы отделения ступеней отработавших блоков ракет.
- Роботы-манипуляторы.

Две задачи динамики систем тел



- Прямая задача – определение ускорений движения тел системы по действующим силам
  $\mathbf{f} \to \mathbf{a}$
- Обратная задача – определение сил, вызывающих заданное ускорение тел системы
  $\mathbf{a} \to \mathbf{f}$

Форма уравнений движения

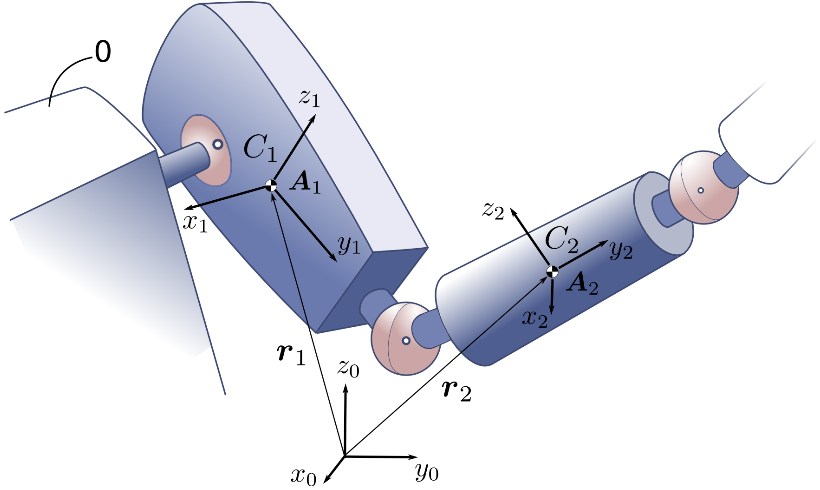
Общий вид уравнений движения систем тел

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) = F + R$$
$$f(q) = 0$$

- $M(\text{модель}, q)$ – матрица масс, зависящая от свойств системы;
- $C(\text{модель}, q, \dot{q})$ – матрица коэффициентов, включающая слагаемые, не зависящие от ускорений;
- F – силы и моменты;
- R – реакции связей. Для идеальных связей

$$R = \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T \boldsymbol{\lambda}$$

Абсолютные координаты



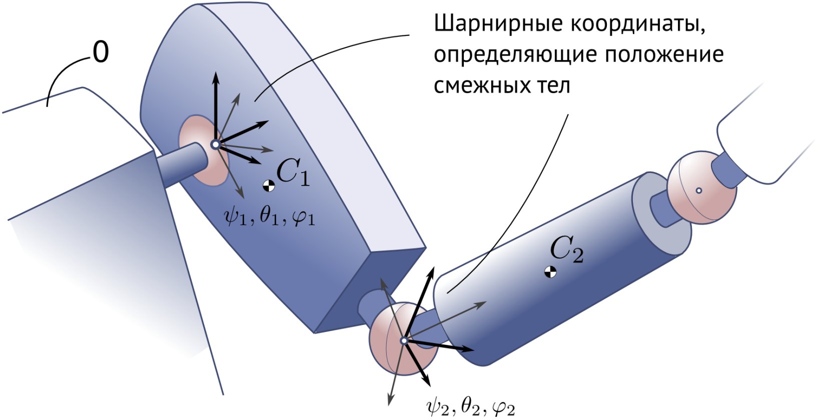
Уравнения Ньютона-Эйлера с уравнениями связи

- Положение тел определяется радиус-векторами $\mathbf{r}_\mathrm{i}$ и выбранными параметрами o_i, описывающими ориентацию твёрдого тела: углами Эйлера, направляющими косинусами (матрицы A_i), кватернионами.
- Уравнения движения интегрируются совместно с уравнениями связей.
- В правую часть уравнений движения кроме внешних сил и моментов добавляются силы и моменты реакции.

Преимущества и недостатки

- ✓ Простые уравнения.
- ✓ Разреженная матрица коэффициентов.
- ✗ Избыточное количество координат, описывающих систему.
- ✗ Большой размер матрицы коэффициентов: $\mathrm{N} = 6\mathrm{n_b} + \mathrm{n_c}$.

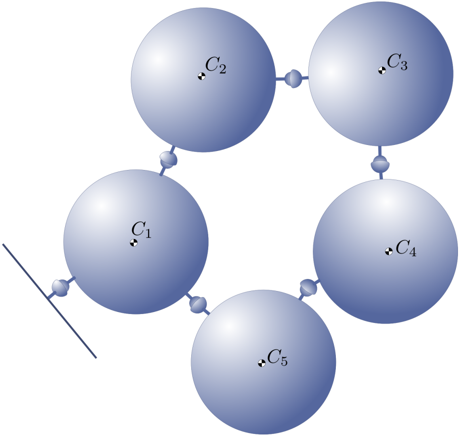
Шарнирные координаты



Уравнения в шарнирных координатах

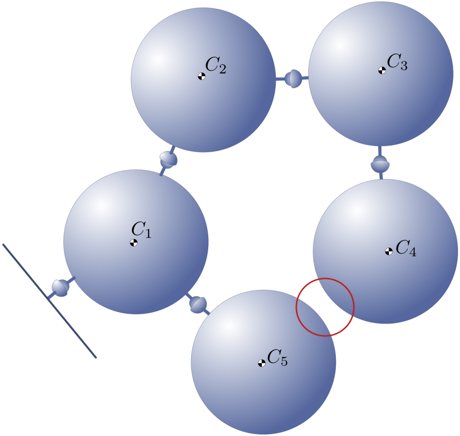
- ✓ Минимальное количество уравнений.
- ✓ Уравнения движения не содержат реакций связей.
- ✗ Сложная процедура формирования матрицы масс.

Системы с замкнутой структурой



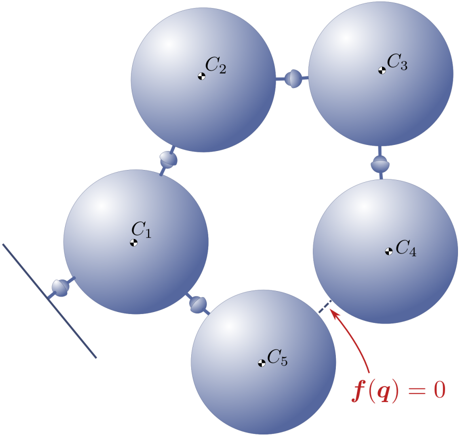
- шарнирные координаты не независимы

Системы с замкнутой структурой



- Приведение системы к структуре дерева - исключение одного или нескольких шарниров.
- Запись уравнения движения для новой приведённой системы.

Системы с замкнутой структурой



- Формируются уравнения связей для исключенных шарниров.
- Уравнения движения решаются совместно с уравнениями связей.

Исходные данные

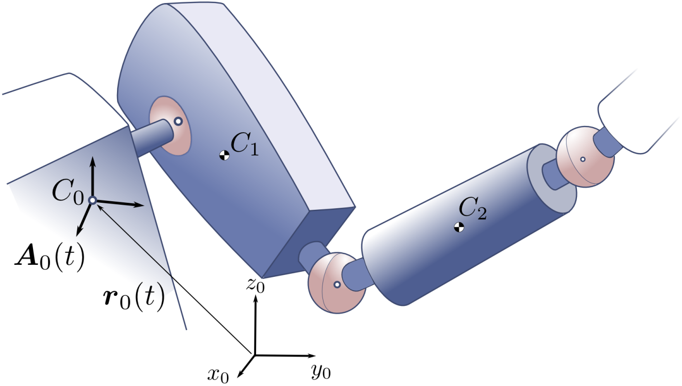
Для полного описания системы многих тел требуются следующие группы параметров:

- количество тел системы;
- параметры, характеризующие структуру взаимосвязей тел;
- параметры, характеризующие кинематические связи;
- параметры, характеризующие расположение шарниров на телах;
- массы и моменты инерции тел.

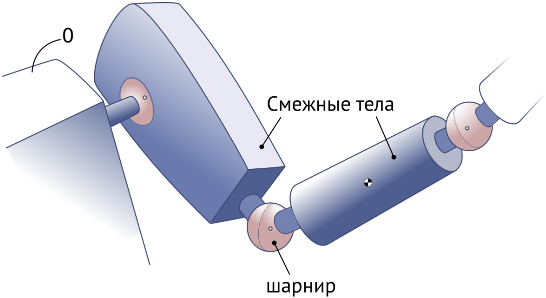
Основные определения

Внешнее тело

Положение внешнего тела в инерциальном пространстве является заданной функцией времени. Внешнее тело не является частью рассматриваемой механической системы, а будет представлено подвижным базисом с известным законом движения.

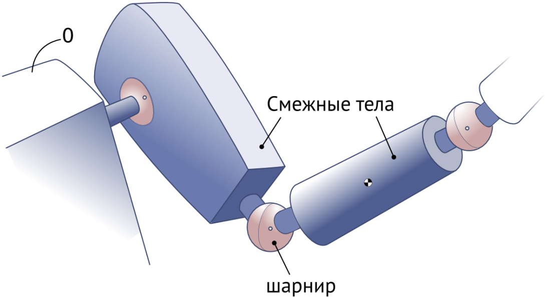


Смежность / Adjacency



Два тела механической системы называются смежными тогда и только тогда, когда они непосредственно оказывают силовое воздействие друг на друга.

Шарнир / Joint (Hinge)

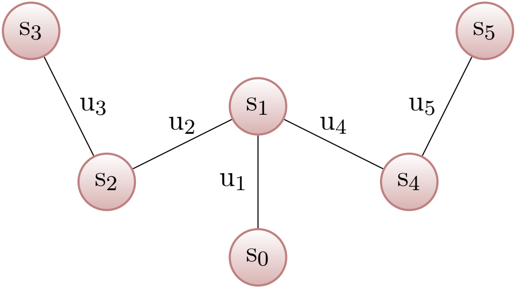


Шарнир – соединение между смежными телами. В шарнире объединены все силы взаимодействия между двумя смежными телами, так что *каждая пара смежных тел имеет только один шарнир*.

Теория графов

Граф / Graph

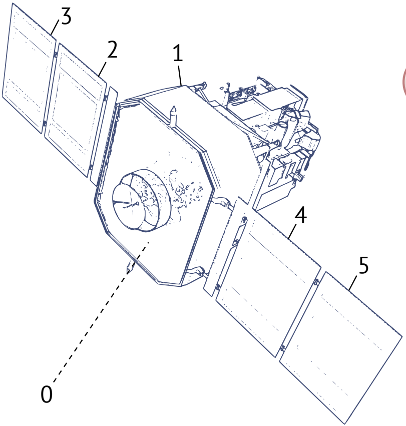
Структура механической системы описывается при помощи графов.

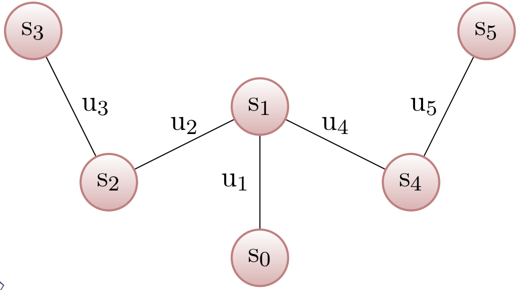


Граф $G(S, U)$ – это совокупность двух множеств - не пустого множества вершин S и множества U неупорядоченных пар различных элементов множества S (множество рёбер или дуг).

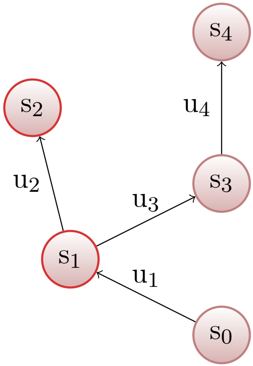
Структура механической системы

Вершины: $s_0, s_1, \ldots, s_n$ обозначают тела.
Дуги: $u_1, u_2, \ldots, u_m$ – шарниры.



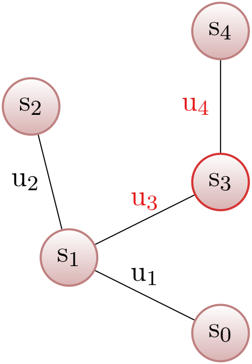


Инцидентность / Incidence



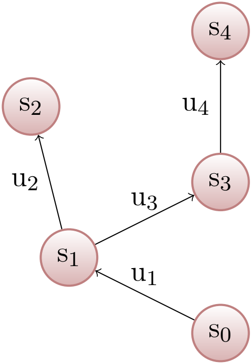
Пусть s_1, s_2 - вершины, а $u_2 = (s_1, s_2)$ - соединяющее их ребро. Тогда вершина s_1 и ребро u_2 инцидентные, вершина s_2 и ребро u_2 также инцидентные.

Смежность / Adjacency



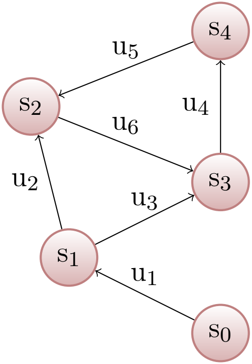
Смежные дуги – ребра, инцидентные одной вершине.
Смежные вершины – две вершины, инцидентные одному ребру.

Ориентированный граф / Orgraph



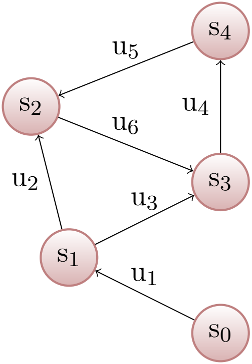
Ориентированный граф – граф с ориентированными дугами.

Маршрут / Sequence



Маршрут – чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны: $s_3, u_4, s_4, u_5, s_2, u_6, s_3$.

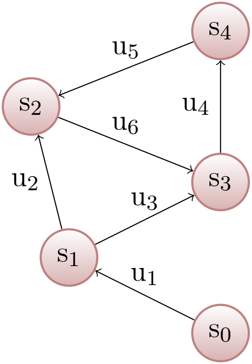
Цепь / Trail



Цепь – маршрут, у которого все ребра различны: s_1, u_3, s_3, u_4, s_4.

Простая цепь – маршрут, у которого все вершины (следовательно и ребра) различны

Определения



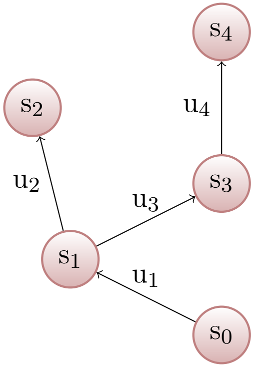
Связанность вершин

Две вершины в графе *связаны*, если существует соединяющая их простая цепь.

Связанный граф – граф, в котором все вершины связаны

Цикл – замкнутая цепь.

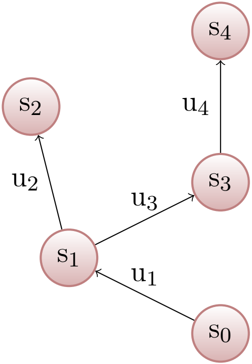
Дерево



Ациклический граф
Граф без циклов называется *ациклическим*.

Дерево – связанный ациклический граф.

Отношение слабого упорядочивания для вершин



$$s_1 \leq s_2, \quad s_1 \leq s_4, \quad s_2 \not\leq s_4$$

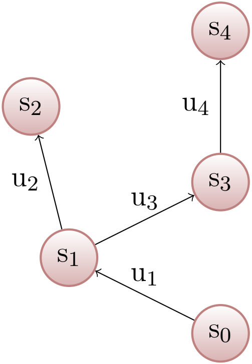
Вершина s_i лежит на пути от вершины s_j к вершине s_0:

$$\boxed{s_i \leq s_j}$$

Вершина s_i лежит на пути от вершины s_j к вершине s_0, но вершина s_i не совпадает s_j:

$$\boxed{s_i < s_j}$$

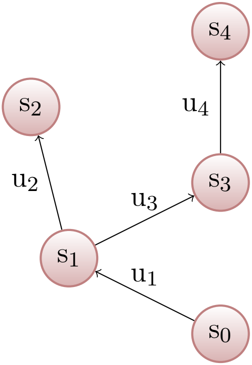
Предшествующая дуга



Дуга, предшествующая вершине s_k $(k \neq 0)$ – это дуга, принадлежащая пути между s_0 и s_k, которая инцидентна s_k.

- Дуга u_1 предшествует вершине s_1.
- Дуга u_4 предшествует вершине s_4.

Предшествующая вершина

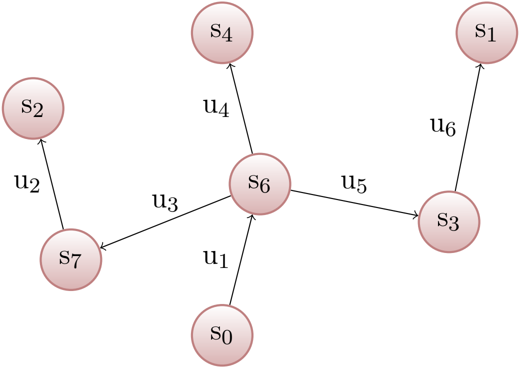


Вершина, предшествующая вершине $s_k \quad (k \neq 0)$ – это вершина, которая связана с вершиной s_k дугой, предшествующей вершине s_k.

- Вершина s_1 предшествует вершине s_2.
- Вершина s_3 предшествует вершине s_4.

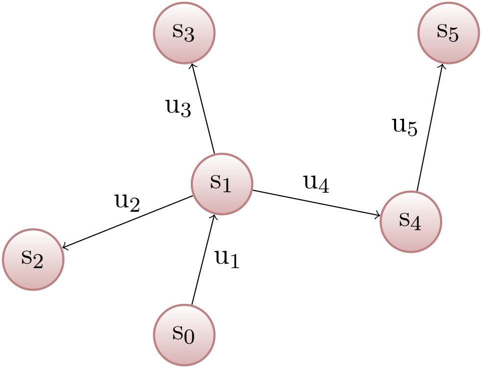
Правильная нумерация графа

Граф с произвольной нумерацией



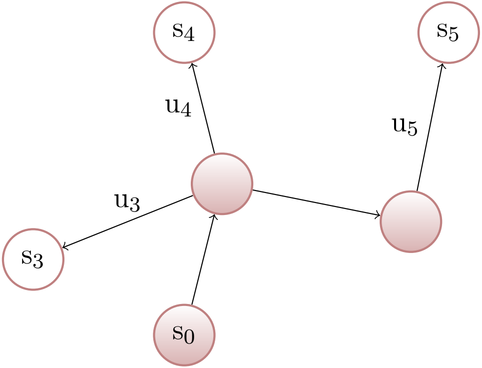
Правильная нумерация графа

В графе со структурой дерева вершины и дуги можно пронумеровать так, что будут выполнены следующие условия:



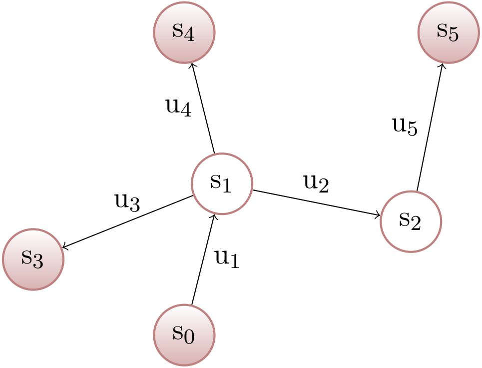
- для всех вершин s_k $(k \neq 0)$ номер дуги, предшествующей вершине s_k, равен k;
- номер вершины, предшествующей s_k, меньше k.

Построение правильной нумерации



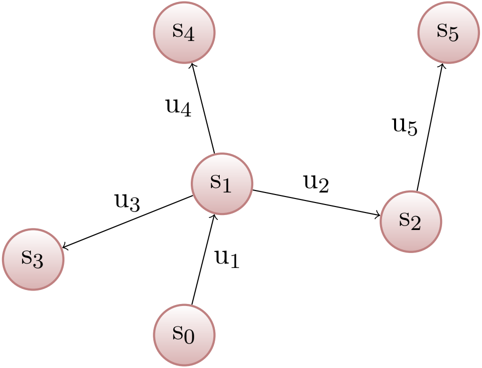
- Определяются граничные вершины – все вершины, за исключением s_0, с которыми инцидентна только одна дуга.
- Вершинам присваиваются наибольшие номера $n, n-1, n-2$ и т.д. Такие же номера даются соответствующим предшествующим дугам.

Построение правильной нумерации



- Пронумерованные вершины и дуги кроме s_0, отсекаются от графа.
- В получившемся меньшем графе определяют граничные вершины.
- Новым граничным вершинам присваиваются наибольшие из имеющихся еще в наличии номера.

Построение правильной нумерации



- Процедура продолжается до тех пор, пока не окажутся помеченными все вершины и дуги.

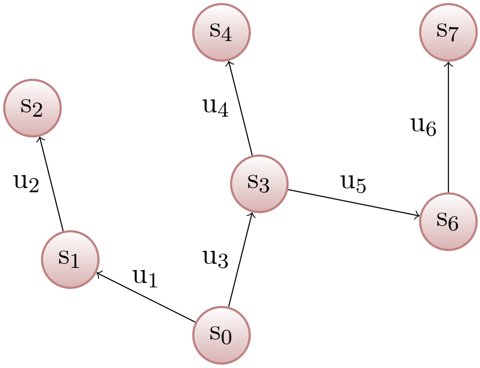
Описание структуры

Функции $\mathrm{i}^+(\alpha), \mathrm{i}^-(\alpha)$

Структуру графа описывается двумя целочисленными функциями:

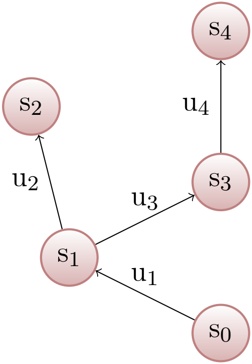
- $\mathrm{i}^+(\alpha)$ – индекс тела из которого дуга α выходит;
- $\mathrm{i}^-(\alpha)$ – индекс тела в которое дуга α входит.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}^+(1) = 0, \quad \mathrm{i}^+(2) = 1\\
&\mathrm{i}^-(1) = 1, \quad \mathrm{i}^-(2) = 2\\
&\mathrm{i}^+(3) = 0, \quad \mathrm{i}^+(4) = 3\\
&\mathrm{i}^-(3) = 3, \quad \mathrm{i}^-(4) = 4\\
&\ldots
\end{aligned}
$$



Матрица инцидентности S

$$\mathrm{S}_{\mathrm{k}\alpha} = \begin{cases} +1: & \mathrm{k} = \mathrm{i}^{+}(\alpha) \\ -1: & \mathrm{k} = \mathrm{i}^{-}(\alpha) \\ 0: & \mathrm{k} \neq \mathrm{i}^{-}(\alpha), \mathrm{k} \neq \mathrm{i}^{+}(\alpha) \end{cases}$$



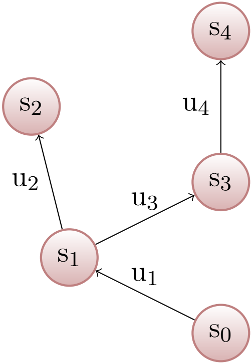
Матрица инцидентности S

Для графа со структурой дерева каждый столбец матрицы инцидентности содержит только один ненулевой элемент равный +1 и один элемент равный -1.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathrm{S}_{01} & \mathrm{S}_{02} & \dots & \mathrm{S}_{0\mathrm{n}} \\ \mathrm{S}_{11} & \mathrm{S}_{12} & \dots & \mathrm{S}_{1\mathrm{n}} \\ \vdots & & & \\ \mathrm{S}_{\mathrm{n}1} & \mathrm{S}_{\mathrm{n}2} & \dots & \mathrm{S}_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix}.$$

Матрица инцидентности S

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \color{red}{+1} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Матрицы инцидентности S_0 и S

Матрицу S можно разделить на две части: матрицу строку $\mathbf{S}_0$ и квадратную матрицу $\mathbf{S}$:

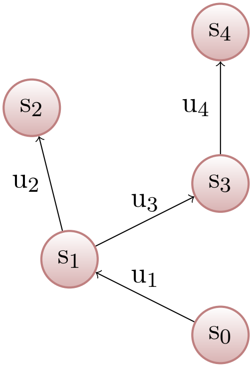
$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} \mathrm{S}_{01} & \mathrm{S}_{02} & \dots & \mathrm{S}_{0\mathrm{n}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathrm{S}_{11} & \mathrm{S}_{12} & \dots & \mathrm{S}_{1\mathrm{n}} \\ \vdots & & & \\ \mathrm{S}_{\mathrm{n}1} & \mathrm{S}_{\mathrm{n}2} & \dots & \mathrm{S}_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix}.$$

Матрица инцидентности S

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

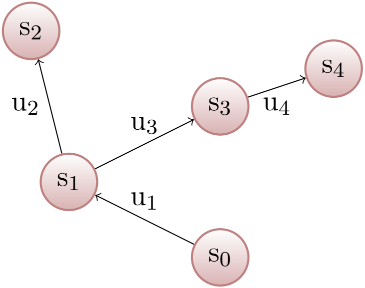
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Матрица T

$$\mathrm{T}_{\alpha \mathrm{k}} = \begin{cases} +1: & \alpha \in \text{ пути от } \mathrm{s_i} \text{ к } \mathrm{s_0} \text{ и направлена } \textbf{к } \mathrm{s_0} \\ -1: & \alpha \in \text{ пути от } \mathrm{s_i} \text{ к } \mathrm{s_0} \text{ и направлена } \textbf{от } \mathrm{s_0} \\ 0: & \alpha \text{ не лежит на пути от } \mathrm{s_i} \text{ к } \mathrm{s_0} \end{cases}$$

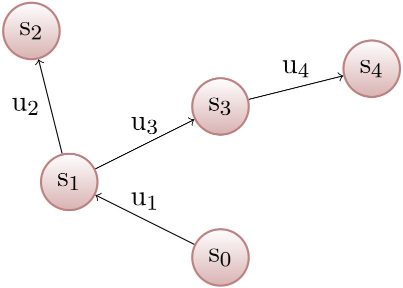
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Свойства матрицы S и T

Свойства матриц S, T

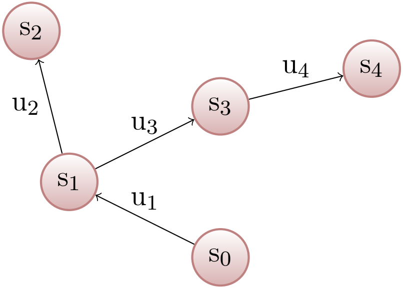
В матрице $\mathbf{S}_0$ отличен от нуля только первый элемент S_{01}.



$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Свойства матрицы $\mathbf{T}$

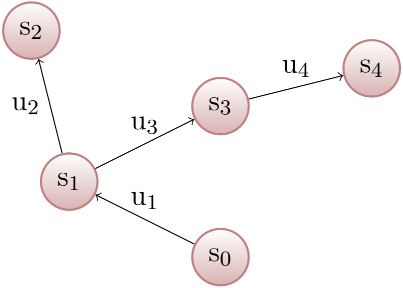
Все элементы первой строки матрицы $\mathbf{T}$ равны $-\mathrm{S}_{01}$.



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Свойства матриц S, T

$$\boxed{\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0^{\mathrm{T}} = -\mathbf{1}_{\mathrm{n}}}$$



$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Произведение матриц S и T

$$\boxed{\mathbf{ST} = \mathbf{TS} = \mathbf{E}}$$

Рассмотрим

$$(\mathbf{TS})_{\mathrm{ab}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{T}_{\mathrm{ai}}\mathrm{S}_{\mathrm{ib}}, (\mathrm{a}, \mathrm{b} = 1, ..., \mathrm{n}).$$

Т.к. $\mathrm{S}_{\mathrm{ib}} = +1$ для $\mathrm{i} = \mathrm{i}^{+}(\mathrm{b})$, $\mathrm{S}_{\mathrm{ib}} = -1$ для $\mathrm{i} = \mathrm{i}^{-}(\mathrm{b})$ и $\mathrm{S}_{\mathrm{ib}} = 0$ во всех других случаях, следовательно

$$(\mathbf{TS})_{\mathrm{ab}} = \mathrm{T}_{\mathrm{ai}^{+}(\mathrm{b})} - \mathrm{T}_{\mathrm{ai}^{-}(\mathrm{b})}.$$

$(\mathbf{TS})_{ab}$ при $a = b$

$$(\mathbf{TS})_{ab} = T_{ai^+(b)} - T_{ai^-(b)}$$

Для $a = b$:
дуга $u_a = u_b$ либо направлена к s_0, либо выходит из s_0.

Дуга направлена к s_0:

$$T_{ai^+(b)} = 1,$$
$$T_{ai^-(b)} = 0;$$

Дуга выходит из к s_0:

$$T_{ai^+(b)} = 0,$$
$$T_{ai^-(b)} = -1.$$

Следовательно:

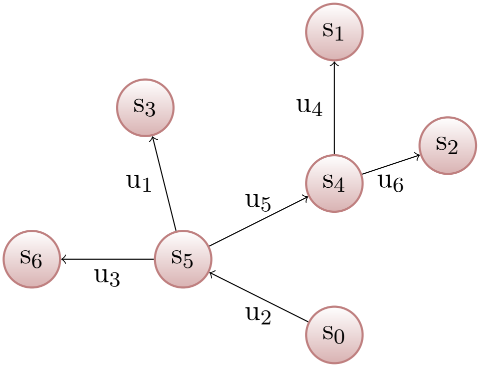
$$(\mathbf{TS})_{aa} = 1$$

$(\mathbf{TS})_{ab}$ при $a \neq b$

$$(\mathbf{TS})_{ab} = T_{ai^+(b)} - T_{ai^-(b)}.$$

Для $a \neq b$ рассмотрим два пути: между s_0 и $s_{i^+(b)}$ и между s_0 и $s_{i^-(b)}$. Дуга u_a принадлежит каждому из путей, либо не принадлежит ни одному из них. В любом случае $T_{ai^+(b)} = T_{ai^-(b)}$ и, следовательно, $(\mathbf{TS})_{ab} = 0$.

Задание



Для изображенного на рисунке графа запишите:

1. функции $\mathrm{i}^+(\alpha)$ и $\mathrm{i}^-(\alpha)$;
2. матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$.

Выполните правильную нумерацию графа.
Запишите для нового графа функции $\mathrm{i}^+(\alpha)$ и $\mathrm{i}^-(\alpha)$ и матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$.