Системы твердых тел

Уравнения в избыточных координатах

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики

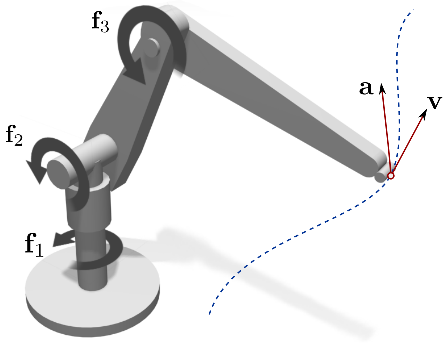
24 ноября 2024 г.

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Системы твёрдых тел

- Системы раскрытия солнечных батарей, антенн, радиаторов, ...
- Системы отделения ступеней отработавших блоков ракет.
- Роботы-манипуляторы.
- Наземные экспериментальные установки.

Две задачи динамики систем тел



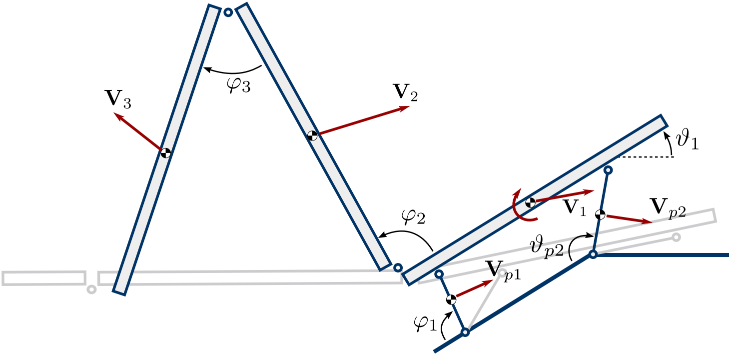
- Прямая задача – определение ускорений движения тел системы по действующим силам
  $\mathbf{f} \to \mathbf{a}$
- Обратная задача – определение сил, вызывающих заданное ускорение тел системы
  $\mathbf{a} \to \mathbf{f}$

История

- 1905 год: модель систем трех тел, соединенных шарнирами
- 60-е годы разработка новых алгоритмов формирования уравнений движения систем тел

КА Ресурс-П

Панель солнечной батареи КА

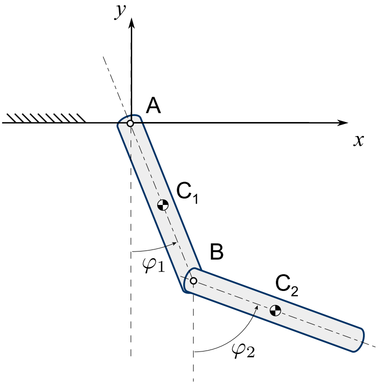


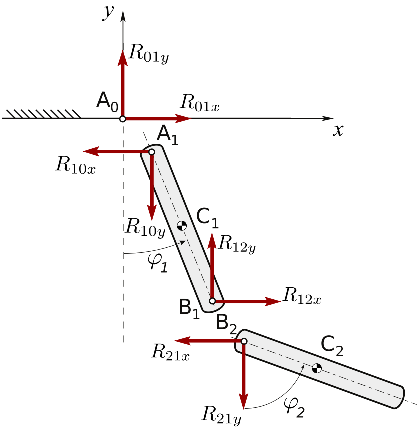
1. $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \to \vartheta_1(\varphi_1), \vartheta_{p2}(\varphi_1)$
2. $\mathbf{V}_{p1}(\varphi_1, \dot{\varphi}_1), \mathbf{V}_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1), \mathbf{V}_{p2}(\varphi_1, \dot{\varphi}_1), \mathbf{V}_2(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2) \ldots \boldsymbol{\omega}_1 = \ldots$

Уравнения в избыточных координатах

Уравнения в абсолютных координатах

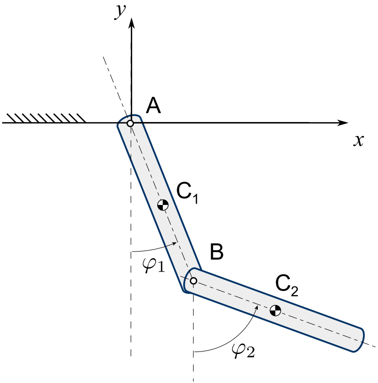
$$(\varphi_1, \varphi_2) \to (x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2)$$

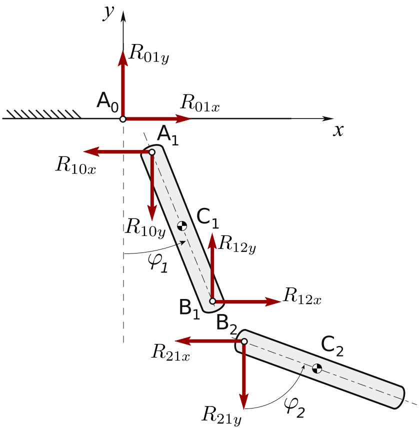




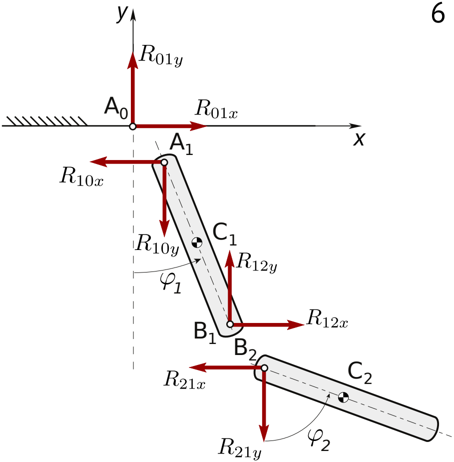
Уравнения в абсолютных координатах

$$(\varphi_1, \varphi_2) \to (x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2)$$





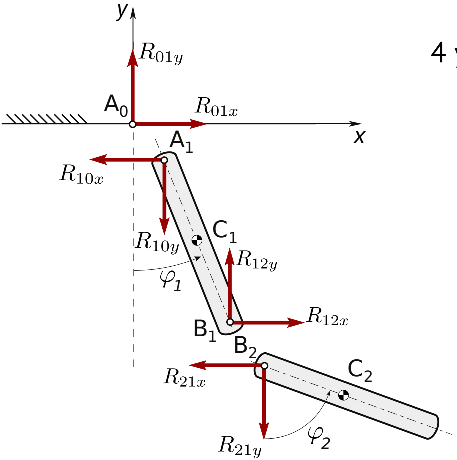
Уравнения движения



6 уравнений движения:

$$
\left\{
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= F_{1x} - R_{10x} + R_{12x},\\
m_1\ddot{y}_1 &= F_{1y} - R_{10y} + R_{12y},\\
J_{1z}\ddot{\varphi}_1 &= M_{1z} + l_1\big(R_{10x}\cos\varphi_1 + \\
&\quad + R_{10y}\sin\varphi_1 + \\
&\quad + R_{12x}\cos\varphi_1 + R_{12y}\sin\varphi_1\big),\\
m_2\ddot{x}_2 &= F_{2x} - R_{21x},\\
m_2\ddot{y}_2 &= F_{2y} - R_{21y},\\
J_{2z}\ddot{\varphi}_2 &= M_{2z} + R_{12x}l_2\cos\varphi_2 + \\
&\quad + R_{12y}l_2\sin\varphi_2
\end{aligned}
\right. \tag{1}
$$

Уравнения связи



4 уравнения связи:

$$\begin{cases} \boxed{x_{A_1} = x_{A_0}} = x_1 - l_1 \sin\varphi_1 = 0 \\ \boxed{y_{A_1} = y_{A_0}} = y_1 + l_1 \cos\varphi_1 = 0 \\ \boxed{x_{B_1} = x_{B_2}} = x_1 + l_1 \sin\varphi_1 = \\ \qquad = x_2 - l_2 \sin\varphi_2 \\ \boxed{y_{B_1} = y_{B_2}} = y_1 - l_1 \cos\varphi_1 = \\ \qquad = y_2 - l_2 \cos\varphi_2 \end{cases} \tag{2}$$

Система ДАЕ

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = F_{1x} - R_{10x} + R_{12x}, \\ m_1\ddot{y}_1 = F_{1y} - R_{10y} + R_{12y}, \\ J_{1z}\ddot{\varphi}_1 = M_{1z} + l_1(R_{10x}\cos\varphi_1 + R_{10y}\sin\varphi_1 + R_{12x}\cos\varphi_1 + R_{12y}\sin\varphi_1), \\ m_2\ddot{x}_2 = F_{2x} - R_{21x}, \\ m_2\ddot{y}_2 = F_{2y} - R_{21y}, \\ J_{2z}\ddot{\varphi}_2 = M_{2z} + R_{12x}l_2\cos\varphi_2 + R_{12y}l_2\sin\varphi_2, \\ x_1 - l_1\sin\varphi_1 = 0, \\ y_1 + l_1\cos\varphi_1 = 0, \\ x_1 + l_1\sin\varphi_1 = x_2 - l_2\sin\varphi_2, \\ y_1 - l_1\cos\varphi_1 = y_2 - l_2\cos\varphi_2. \end{cases} \quad (3)$$

Система ДАЕ

$$\begin{cases} x_1 - l_1 \sin\varphi_1 = 0 \\ y_1 + l_1 \cos\varphi_1 = 0 \\ x_1 + l_1 \sin\varphi_1 = x_2 - l_2 \sin\varphi_2 \\ y_1 - l_1 \cos\varphi_1 = y_2 - l_2 \cos\varphi_2 \end{cases} \rightarrow \frac{d^2 \ldots}{dt^2} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos\varphi_1 = \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin\varphi_1 \\ \ddot{y}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin\varphi_1 = \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos\varphi_1 \\ \ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 - \ddot{x}_2 + \ddot{\varphi}_2 l_2 \cos\varphi_2 = \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \sin\varphi_2 \\ \ddot{y}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin\varphi_1 - \ddot{y}_2 - \ddot{\varphi}_2 l_2 \sin\varphi_2 = \dot{\varphi}_2^2 l_2 \cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos\varphi_1 \end{cases}$$

Система ДАЕ

$$
\begin{cases}
m_1\ddot{x}_1 = F_{1x} - R_{10x} + R_{12x},\\
m_1\ddot{y}_1 = F_{1y} - R_{10y} + R_{12y},\\
J_{1z}\ddot{\varphi}_1 = M_{1z} + l_1(R_{10x}\cos\varphi_1 + R_{10y}\sin\varphi_1 + +R_{12x}\cos\varphi_1 + R_{12y}\sin\varphi_1),\\
m_2\ddot{x}_2 = F_{2x} - R_{21x},\\
m_2\ddot{y}_2 = F_{2y} - R_{21y},\\
J_{2z}\ddot{\varphi}_2 = M_{2z} + R_{12x}l_2\cos\varphi_2 + R_{12y}l_2\sin\varphi_2\\
\ddot{x}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1\cos\varphi_1 = \dot{\varphi}_1^2 l_1\sin\varphi_1\\
\ddot{y}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1\sin\varphi_1 = \dot{\varphi}_1^2 l_1\cos\varphi_1\\
\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1 - \ddot{x}_2 + \ddot{\varphi}_2 l_2\cos\varphi_2 = \dot{\varphi}_1^2 l_1\sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2\sin\varphi_2\\
\ddot{y}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1\sin\varphi_1 - \ddot{y}_2 - \ddot{\varphi}_2 l_2\sin\varphi_2 = \dot{\varphi}_2^2 l_2\cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_1^2 l_1\cos\varphi_1
\end{cases}
$$

Структура ДАЕ

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{\varphi}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} R_{10x} \\ R_{10y} \\ R_{12x} \\ R_{12y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{E}_{2\times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{iz} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_1 \cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 \sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & l_1 \cos\varphi_1 & -1 & 0 & l_2 \cos\varphi_2 \\ 0 & 1 & l_1 \sin\varphi_1 & 0 & -1 & -l_2 \sin\varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}.$$

Матричные уравнения

$$\begin{cases} \mathbf{m}\mathbf{w} + \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{P} \\ \mathbf{Q}\mathbf{w} = \mathbf{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Решение

$$\mathbf{w} = \mathbf{m}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\lambda}),$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{b},$$

$$\boxed{\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{Q}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{b}}$$ – СЛУ относительно $\boldsymbol{\lambda}$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{Q}^T)^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{m}^{-1}[\mathbf{P} - \mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{Q}^T)^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{b})]$$

Пример

Пример в MATLAB

https://classmech.ru/pages/mbs/dae/

Задание

https://classmech.ru/pages/mbs/point_on_roof/

Литература

1. *Й. Виттенбург* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980.
2. *Лилов Л. К.* Моделирование систем связанных тел. М.: “Наука”, 1993.
3. *R. Featherstone* Rigid Body Dynamics Algorithm,