# Использование принципа Даламбера-Лагранжа для построения уравнений движения систем тел

## (метод Кейна)

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики

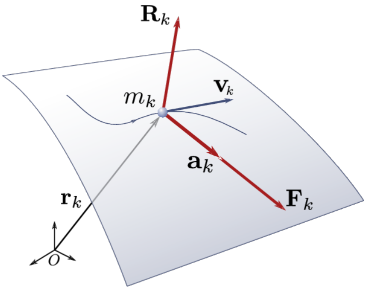
САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

# Метод Кейна

- Основан на принципе Даламбера-Лагранжа.
- В уравнения не входят реакции связей.
- Алгоритм построения и форма уравнений движения ориентированы на машинное формирование уравнений движения.
- Метод разработан в 1961 проф. Т. Кейном (Стэндфорский университет)
  *Kane, T.R.*, Dynamics of nonholonomic systems, J. App. Mech., 28, 574, 1961.

# Принцип Даламбера-Лагранжа

# Уравнения движения



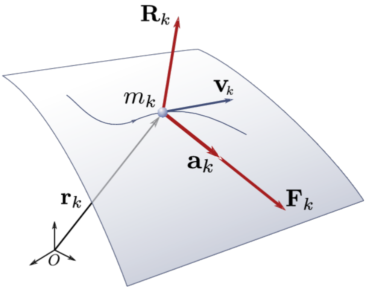

Уравнения движения системы материальных точек:

$$m_k\mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (1)$$

После умножения каждого уравнения (1) на соответствующее *виртуальное* перемещение $\delta\mathbf{r}_k$ и сложения всех уравнений:

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathbf{F}_k - m_k\mathbf{a}_k) \cdot \delta\mathbf{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\mathbf{R}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k}_{0} = 0.$$

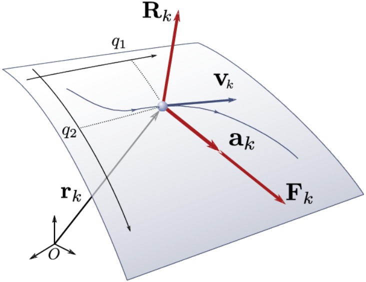
# Общее уравнение динамики




Общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \tag{2}$$

# Общее уравнение динамики




Вариация радиус-вектора $\mathbf{r}_k(q_1, \ldots, q_n)$ в обобщённых координтах:

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (3)$$

Общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}_k) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (4)$$

# Общее уравнение динамики

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}_k) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \tag{5}$$

После изменения порядка суммирования:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \left( \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} - m_k \mathbf{a}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0. \tag{6}$$

С учётом независимости вариаций обобщённых координат:

$$\sum_{k=1}^{N} \left( \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} - m_k \mathbf{a}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

# Частные скорости

Скорость точки

$$\mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t},$$

Частная производная скорости точки по обобщенной скорости:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \mathbf{u}_{ki}. \tag{8}$$

Частная скорость:

$$\boxed{\mathbf{u}_{ki} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_i}} \tag{9}$$

# Уравнения движения

Подставляя

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

в уравнения движения

$$\sum_{k=1}^{N} \left( \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} - m_k \mathbf{a}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

получим

$$\sum_{k=1}^{N} \left( \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_i} - m_k \mathbf{a}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

или

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{u}_{ki} - m_k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{u}_{ki}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

# Уравнения движения

Обозначив обобщенные активные силы $Q_i$ и силы инерции $Q_i^*$:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{u}_{ki}, \quad Q_i^* = -\sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{u}_{ki}$$

уравнения

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{u}_{ki} - m_k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{u}_{ki}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

принимают вид:

$$Q_i + Q_i^* = 0.$$

# Алгоритм метода

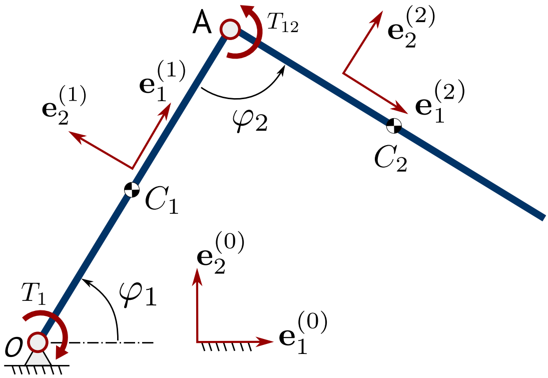
1. Выбираются обобщенные координаты $q_1, q_2 \ldots, q_n$.
2. Определяются выражения для скоростей точек приложения сил и центров масс всех тел: $\mathbf{v}_k$.
3. Определяются линейные и угловые ускорения тел системы $\mathbf{a}_i$, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$.
4. Определяются частные скорости $\mathbf{u}_{kj} = \partial \mathbf{v}_k / \partial \dot{q}_j$.
5. Определяются силы и моменты (активные и инерционные).
6. Вычисляются скалярные произведения сил, моментов и частных скоростей.

# Пример: солнечная батарея

# Движение створок солнечной батареи

- Рассматривается процесс раскрытия солнечной батареи, состоящей из двух створок
- Рассматривается плоское движение створок, створки рассматриваются как однородные стержни
- В исходном положении $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = 0$
- В конечном положении $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$
- Движение ствокок происходит под действием пружин кручения или торсионов, установленных в узлах вращения O и A

# Две створки




$T_1$, $T_{12}$ – моменты пружинных приводов – торсионов.

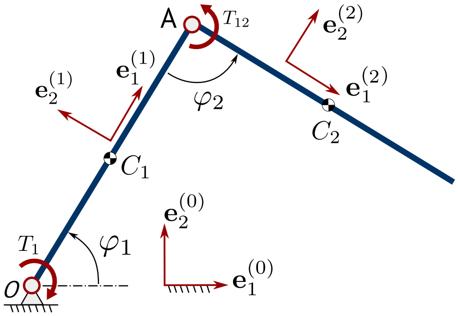
# Параметры системы

Геометрические параметры:

$$OC_1 = L_1,$$
$$OA = 2L_1,$$
$$AC_2 = L_2.$$

Массы и моменты инерции створок относительно оси проходящей через центр масс:

$$m_1, J_1, m_2, J_2.$$



# Обобщенные координаты

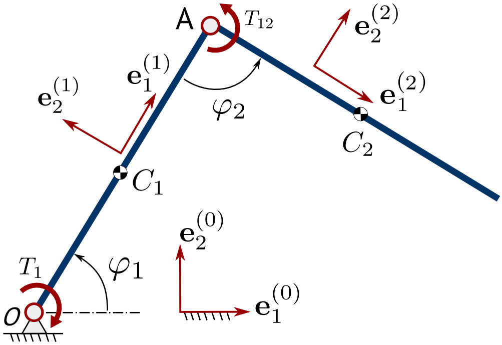
Обобщенные координаты:

$$\mathbf{q} = \{\varphi_1, \varphi_2\}.$$

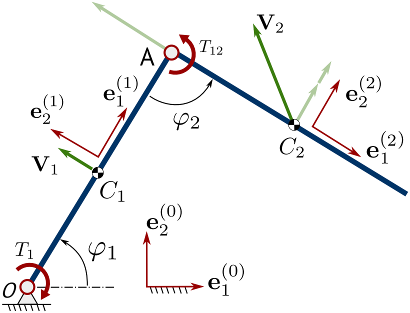
Матрицы преобразования координат:

$$\mathbf{A}^{01} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{12} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 \end{bmatrix}.$$



# Линейные и угловые скорости




Линейные скорости:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{e}_2^{(1)} L_1 \dot{\varphi}_1, \tag{13}$$

$$\mathbf{V}_2 = (\mathbf{e}_2^{(1)} 2L_1 + \mathbf{e}_2^{(2)} L_2)\dot{\varphi}_1 + \tag{14}$$

$$+ \mathbf{e}_2^{(2)} L_2 \dot{\varphi}_2. \tag{15}$$

Угловые скорости:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{e}_3^{(1)} \dot{\varphi}_1, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{e}_3^{(1)} \dot{\varphi}_1 + \mathbf{e}_3^{(2)} \dot{\varphi}_2. \tag{17}$$

# Частные скорости

Абсолютные линейные и угловые скорости:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{e}_2^{(1)} L_1 \dot{\varphi}_1 = \mathbf{u}_{11} \dot{\varphi}_1, \tag{18}$$

$$\mathbf{V}_2 = (\mathbf{e}_2^{(1)} 2L_1 + \mathbf{e}_2^{(2)} L_2) \dot{\varphi}_1 + \mathbf{e}_2^{(2)} L_2 \dot{\varphi}_2 = \mathbf{u}_{21} \dot{\varphi}_1 + \mathbf{u}_{22} \dot{\varphi}_2, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{e}_3^{(1)} \dot{\varphi}_1 = \mathbf{w}_{11} \dot{\varphi}_1, \tag{20}$$

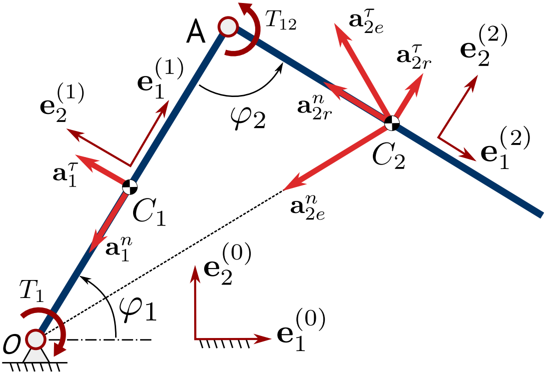
$$\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{e}_3^{(1)} \dot{\varphi}_1 + \mathbf{e}_3^{(2)} \dot{\varphi}_2 = \mathbf{w}_{21} \dot{\varphi}_1 + \mathbf{w}_{22} \dot{\varphi}_2. \tag{21}$$

Частные скорости:

$$\mathbf{u}_{11}^{(1)} = \mathbf{e}_2^{(1)} L_1, \quad \mathbf{u}_{12}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{w}_{11}^{(1)} = \mathbf{e}_3^{(1)}, \quad \mathbf{w}_{12} = 0,$$

$$\mathbf{u}_{21} = \mathbf{e}_2^{(1)} 2L_1 + \mathbf{e}_2^{(2)} L_2, \quad \mathbf{u}_{22} = \mathbf{e}_2^{(2)} L_2, \quad \mathbf{w}_{21} = \mathbf{e}_3^{(1)}, \quad \mathbf{w}_{22} = \mathbf{e}_3^{(2)}.$$

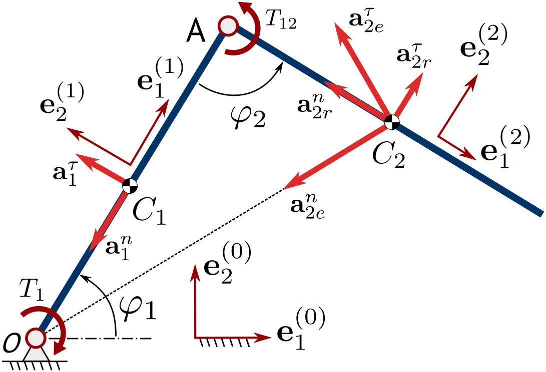
# Ускорения: створка 1




$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1^n + \mathbf{a}_1^\tau = \mathbf{e}_2^{(1)} L_1 \ddot{\varphi}_1 - \mathbf{e}_1^{(1)} L_1 \dot{\varphi}_1^2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_{11} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{f}_1$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{e}_3^{(1)} \ddot{\varphi}_1$$

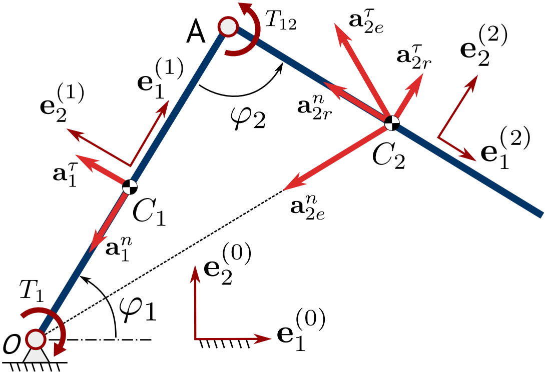
# Ускорения: створка 2




$$\mathbf{a}_2 = (\mathbf{e}_2^{(1)} 2L_1 + \mathbf{e}_2^{(2)} L_2)\ddot{\varphi}_1 + (-\mathbf{e}_1^{(1)} 2L_1 - \mathbf{e}_1^{(2)} L_2)\dot{\varphi}_1^2 +$$

$$+ \mathbf{e}_2^{(2)} L_2 \ddot{\varphi}_2 - \mathbf{e}_1^{(2)} L_2 \dot{\varphi}_2^2 - 2\mathbf{e}_1^{(2)} \dot{\varphi}_1 L_2 \dot{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_{21} & \boldsymbol{s}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{f}_2$$

# Ускорения: створка 2




$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{e}_3^{(2)}(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2).$$

# Уравнения движения

Обобщенные активные силы:

$$Q_i = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{1i} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u}_{2i} - (\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_{12}) \cdot \mathbf{w}_{1i} + \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{w}_{2i}.$$

Силы инерции:

$$Q_i^* = -m_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u}_{1i} - m_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_{2i} - J_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{w}_{1i} - J_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{w}_{2i}.$$

$$\boxed{Q_i + Q_i^* = 0, \quad i = 1, 2}$$

# Обобщенные активные силы

$$Q_i = -(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_{12}) \cdot \mathbf{w}_{1i} + \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{w}_{2i}.$$

$$\mathbf{w}_{11}^{(1)} = \mathbf{e}_3^{(1)},\ \mathbf{w}_{12} = 0,\ \mathbf{w}_{21} = \mathbf{e}_3^{(1)},\ \mathbf{w}_{22} = \mathbf{e}_3^{(2)}$$

$$Q_1 = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 + T_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_1$$

$$Q_2 = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 + T_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_{12}$$

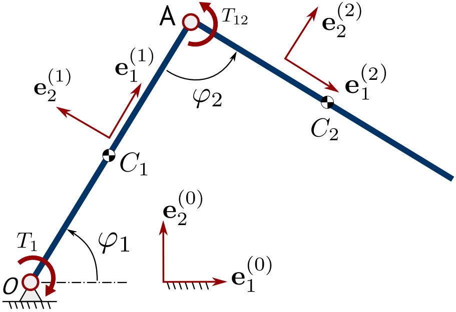
# Обобщенные силы инерции: $Q_1$

$$Q_1^* = -m_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u}_{11} - m_2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_{21} - J_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{w}_{11} - J_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{w}_{21}.$$

После подстановки ускорений и частных скоростей:

$$Q_1^* = -m_1(\mathbf{e}_2^{(1)}L_1\ddot{\varphi}_1 - \mathbf{e}_1^{(1)}L_1\dot{\varphi}_1^2) \cdot \mathbf{e}_2^{(1)}L_1 -$$
$$-m_2[(\mathbf{e}_2^{(1)}2L_1+\mathbf{e}_2^{(2)}L_2)\ddot{\varphi}_1-(\mathbf{e}_1^{(1)}2L_1+\mathbf{e}_1^{(2)}L_2)\dot{\varphi}_1^2+\mathbf{e}_2^{(2)}L_2\ddot{\varphi}_2-\mathbf{e}_1^{(2)}L_2\dot{\varphi}_2^2]\cdot$$
$$\cdot(\mathbf{e}_2^{(1)}2L_1 + \mathbf{e}_2^{(2)}L_2) - J_1\mathbf{e}_3^{(1)}\ddot{\varphi}_1 \cdot \mathbf{e}_3^{(1)} - J_2[\mathbf{e}_3^{(2)}(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2)] \cdot \mathbf{e}_3^{(1)}.$$

# Скалярные произведения базисных векторов




$$\mathbf{e}_1^{(1)} \cdot \mathbf{e}_1^{(1)} = 1,$$

$$\mathbf{e}_1^{(1)} \cdot \mathbf{e}_2^{(1)} = 0,$$

$$\mathbf{e}_1^{(1)} \cdot \mathbf{e}_1^{(2)} = \mathbf{e}_2^{(1)} \cdot \mathbf{e}_2^{(2)} = -\cos\varphi_2,$$

$$\mathbf{e}_1^{(1)} \cdot \mathbf{e}_2^{(2)} = \sin\varphi_2,$$

$$\mathbf{e}_2^{(1)} \cdot \mathbf{e}_1^{(2)} = -\sin\varphi_2.$$

# Обобщенные силы инерции

$$Q_1^* = -m_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u}_{11} - m_2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_{21} - J_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{w}_{11} - J_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{w}_{21}, \quad (22)$$

$$Q_2^* = -m_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u}_{12} - m_2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_{22} - J_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{w}_{12} - J_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{w}_{22}. \quad (23)$$

После подстановки ускорений, частных скоростей и вычисления скалярных произведений:

$$Q_1^* = -J_1\ddot{\varphi}_1 - L_1^2\left(m_1 + 4m_2\right)\ddot{\varphi}_1 - \left(J_2 + L_2^2 m_2\right)\left(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2\right) + \\ + 2L_1L_2m_2\left(-\sin\varphi_2\left(2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\right)\dot{\varphi}_2 + \cos\varphi_2\left(2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2\right)\right), \quad (24)$$

$$Q_2^* = 2L_1L_2m_2\left(\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_2 + \ddot{\varphi}_1\cos\varphi_2\right) - \left(J_2 + L_2^2m_2\right)\left(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2\right). \quad (25)$$

# Уравнения движения

$$Q_i + Q_i^* = 0, \quad i = 1, 2.$$

$$\begin{aligned}
&-J_1\ddot{\varphi}_1 - L_1^2\left(m_1 + 4m_2\right)\ddot{\varphi}_1 - \left(J_2 + L_2^2 m_2\right)\left(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2\right) + \\
&+ 2L_1 L_2 m_2\left(\left(2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2\right)\cos\varphi_2 - \left(2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\right)\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2\right) + T_1 = 0,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
&2L_1 L_2 m_2\left(\dot{\varphi}_1^2 \sin\varphi_2 + \ddot{\varphi}_1\cos\varphi_2\right) - \\
&\qquad - \left(J_2 + L_2^2 m_2\right)\left(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2\right) + T_{12} = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

# Матрица масс

$$Q_1^* = -m_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u}_{11} - m_2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_{21} - J_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{w}_{11} - J_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{w}_{21},$$
$$Q_2^* = -m_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u}_{12} - m_2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_{22} - J_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{w}_{12} - J_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{w}_{22}.$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_{11} & \boldsymbol{s}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{f}_1, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_{21} & \boldsymbol{s}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{f}_2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} - \mathbf{f}$$

# Элементы матрицы масс

$$m_{11} = m_1 \boldsymbol{s}_{11} \cdot \boldsymbol{u}_{11} + m_2 \boldsymbol{s}_{21} \cdot \boldsymbol{u}_{21} + \boldsymbol{J}_1 \boldsymbol{e}_z \cdot \mathbf{w}_{11} + \boldsymbol{J}_2 \boldsymbol{e}_z \cdot \mathbf{w}_{21}$$

$$m_{12} = m_2 \boldsymbol{s}_{22} \cdot \boldsymbol{u}_{21} + \boldsymbol{J}_2 \boldsymbol{e}_z \cdot \mathbf{w}_{21}$$

$$m_{21} = m_1 \boldsymbol{s}_{11} \cdot \boldsymbol{u}_{12} + m_2 \boldsymbol{s}_{21} \cdot \boldsymbol{u}_{22} + \boldsymbol{J}_1 \boldsymbol{e}_z \cdot \mathbf{w}_{12} + \boldsymbol{J}_2 \boldsymbol{e}_z \cdot \mathbf{w}_{22}$$

$$m_{22} = m_2 \boldsymbol{s}_{22} \cdot \boldsymbol{u}_{22} + \boldsymbol{J}_2 \boldsymbol{e}_z \cdot \mathbf{w}_{22}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} m_1 \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{u}_{11} + m_2 \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{u}_{21} \\ m_1 \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{u}_{12} + m_2 \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{u}_{22} \end{bmatrix}$$

# Уравнения движения

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} + \mathbf{f}$$

# Список использованных источников

1. *Kane, T.R.*, Dynamics of nonholonomic systems, J. App. Mech., 28, 574, 1961.
2. *Joel Storch and Stephen Gates*, Motivating Kane's Method for Obtaining Equations of Motion for Dynamic System. Engineering Notes, Vol. 12, N. 4, July-August 1989.