Метод отдельных тел
(метод А. Ф. Верещагина)

Юдинцев В. В.
Кафедра теоретической механики

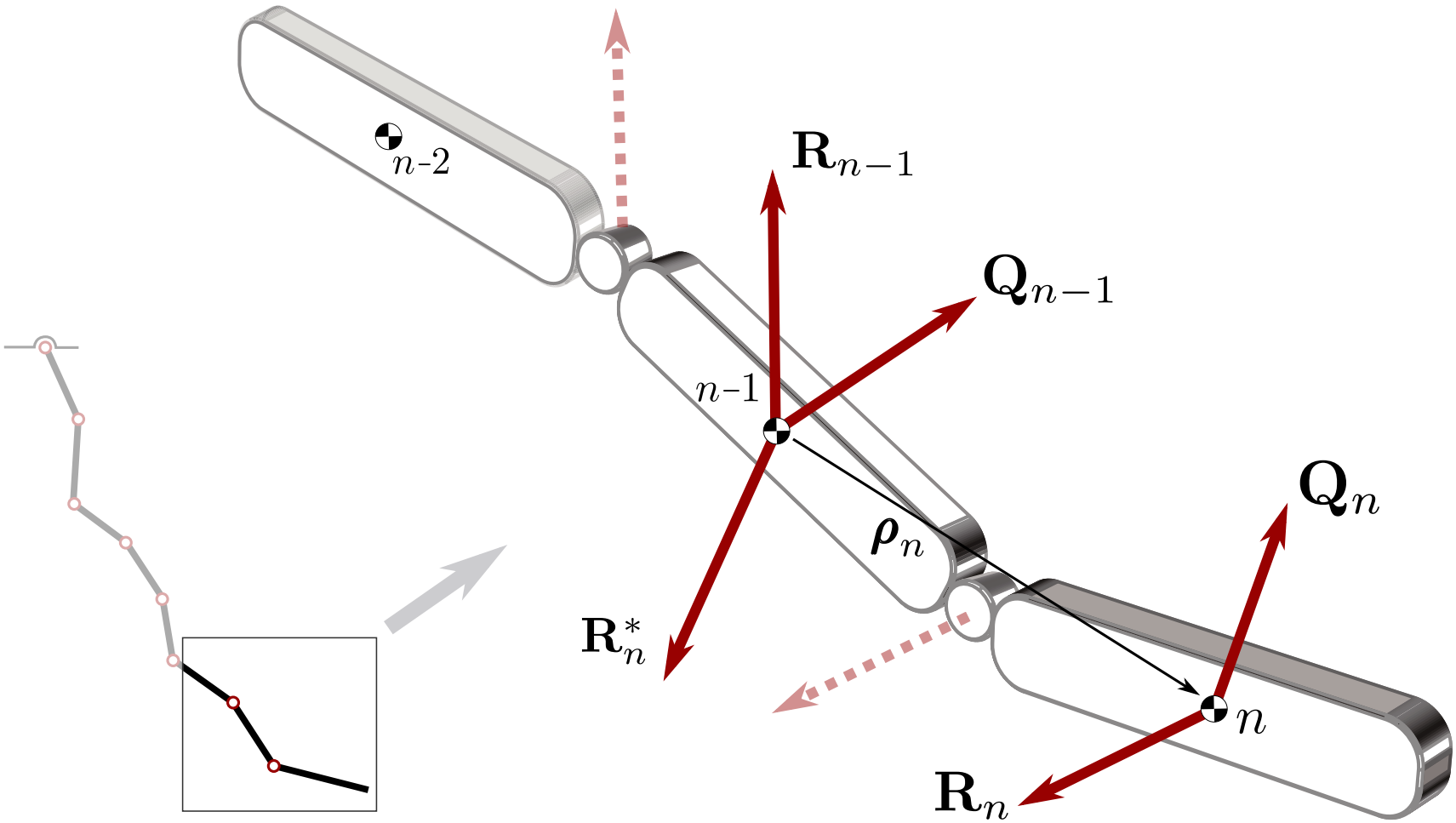
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С. П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

29 марта 2014 г.

Метод отдельных тел

- Метод разработан Верещагиным А. Ф. в 1974 году: *Верещагин А. Ф.* Компьютерное моделирование динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов Инженерная кибернетика, вып. 6, 1974, с. 65-70.
- Используются шарнирные координаты.
- Не формируется матрица масс всей системы: все матричные операции выполняются с матрицами и векторами размерности ≤ 6.
- Вычислительная трудоёмкость пропорциональна количеству тел системы: $O(n)$.

Уравнения движения



Уравнения движения тела n

$$\boxed{\mathbf{M}_n \mathbf{a}_n = \mathbf{Q}_n + \mathbf{R}_n} \tag{1}$$

где $\mathbf{M}_n$ – матрица инерции тела:

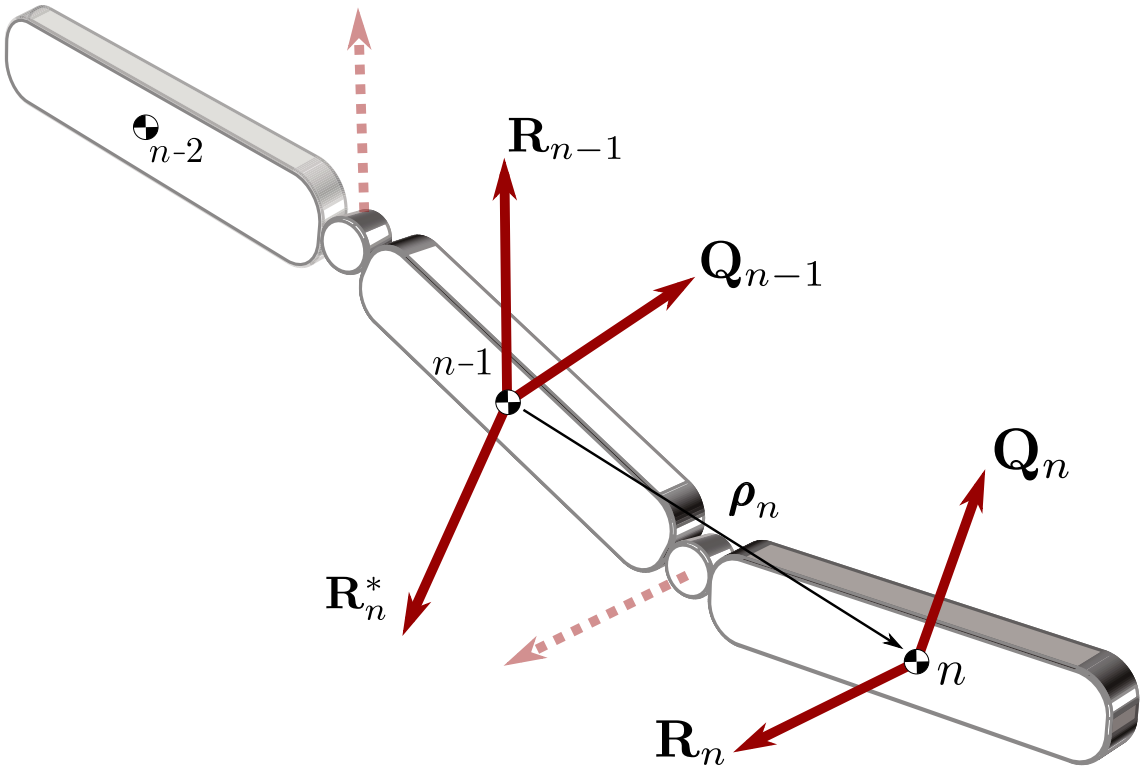
$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} m_n \mathbf{E}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_c \end{bmatrix}; \tag{2}$$

$\mathbf{a}_n$ – столбец линейных и угловых ускорений тела n, $\mathbf{Q}_n$ – столбец активных сил и моментов, действующих на тело n, $\mathbf{R}_n$ – столбец сил и моментов реакции, действующих на тело n:

$$\mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_n \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_n \\ \mathbf{M}_n - \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{J}_n \cdot \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_n^c \\ \mathbf{M}_n^c \end{bmatrix}.$$

Уравнения движения тела $n-1$

$$\boxed{\mathbf{M}_{n-1}\mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{R}_{n-1} + \mathbf{R}_n^*} \tag{3}$$

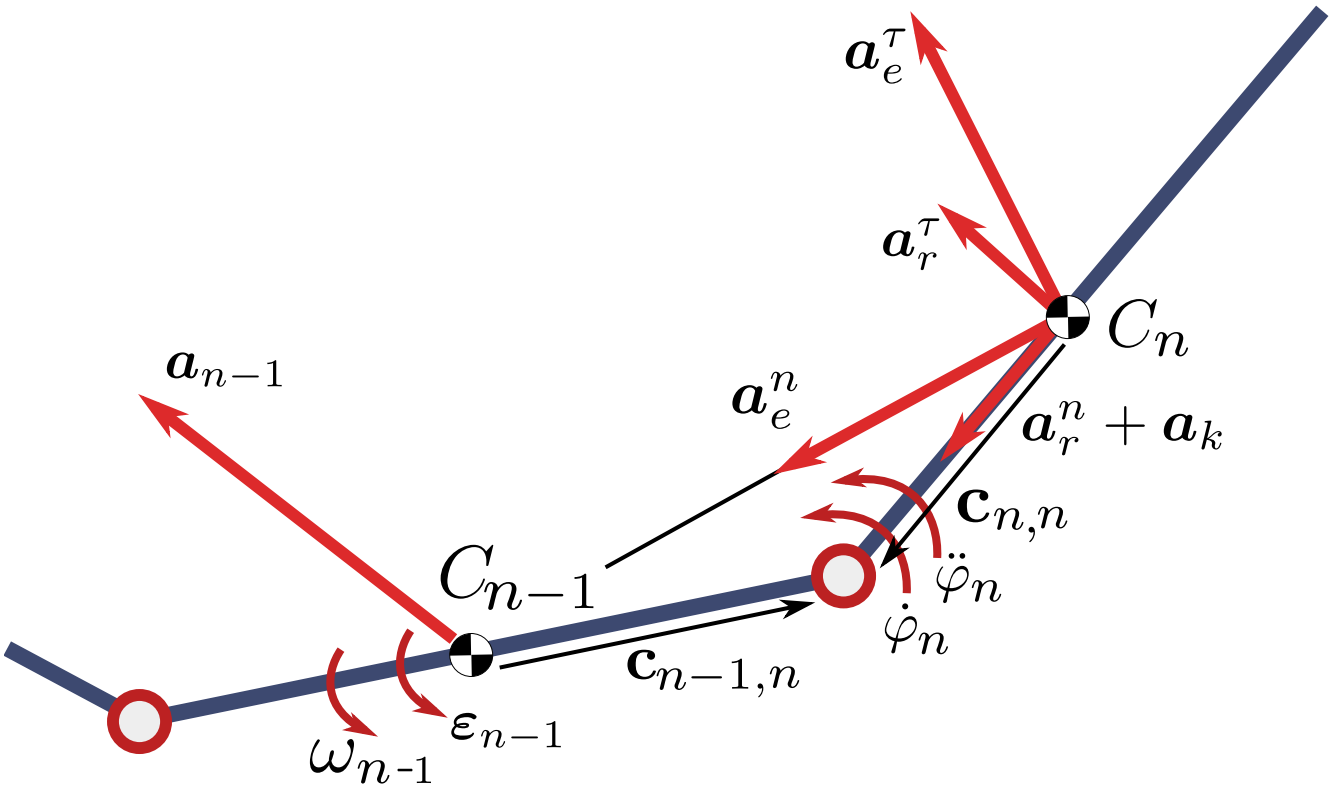


$\mathbf{R}_n^*$ – столбец сил и моментов реакции, приведённых к центру масс тела $n-1$:

$$\mathbf{R}_n^* = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_n^c \\ \mathbf{M}_n^c + \boldsymbol{\rho}_n \times \mathbf{F}_n^c \end{bmatrix}.$$

Ускорение

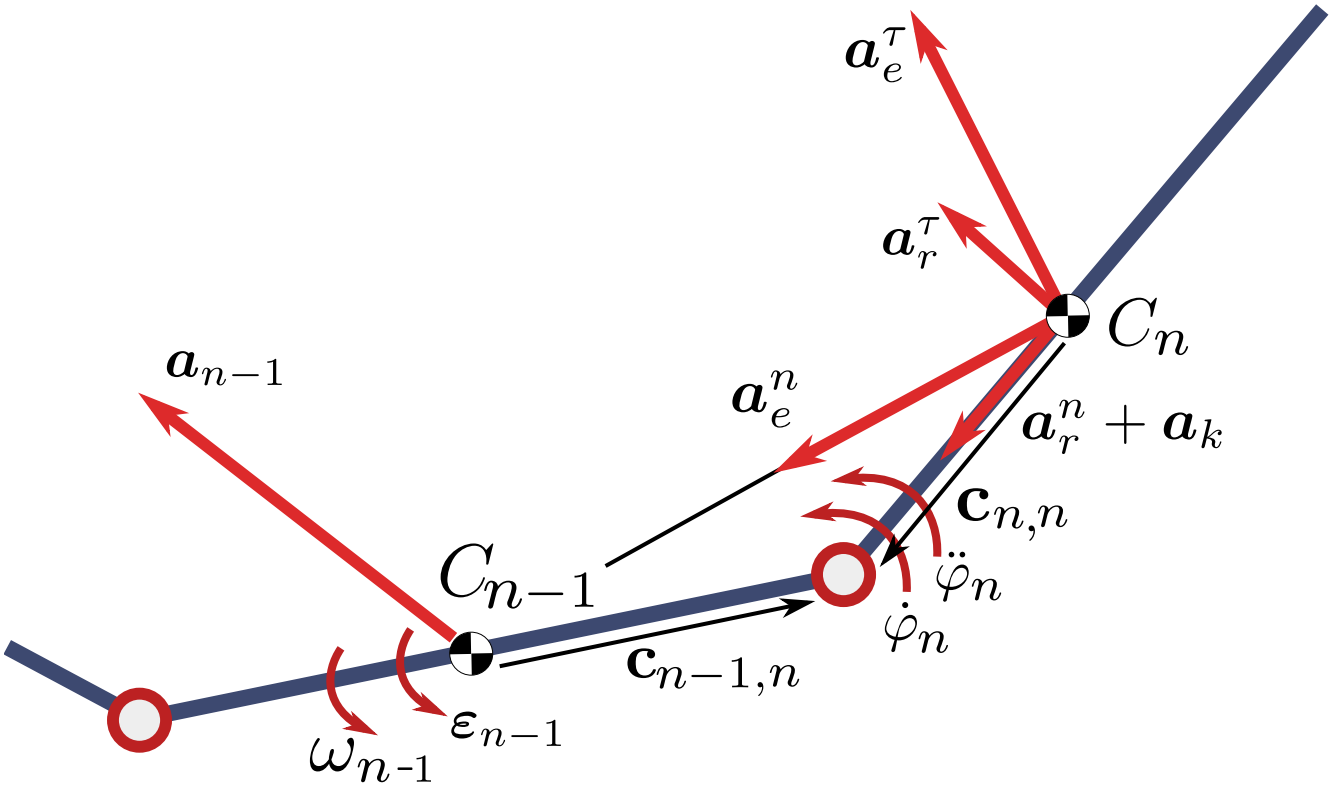
$$\boxed{\mathbf{a}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{a}'_n} \tag{4}$$



Матрица $\mathbf{C}_n$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{a}'_n$$

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\boldsymbol{\rho}_n\times \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\boldsymbol{\rho}_n\times \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_{n-1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_{n-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1} \times \boldsymbol{\rho}_n \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$



Шарнирное ускорение

Подставив в уравнение движения $\mathbf{a}_n$ и умножив результата на $\mathbf{S}_n^T$

$$\mathbf{S}_n^T \cdot \boxed{\mathbf{M}_n \mathbf{a}_n = \mathbf{Q}_n + \mathbf{R}_n} \leftarrow \mathbf{a}_n = \ldots \mathbf{q}_n, \tag{6}$$

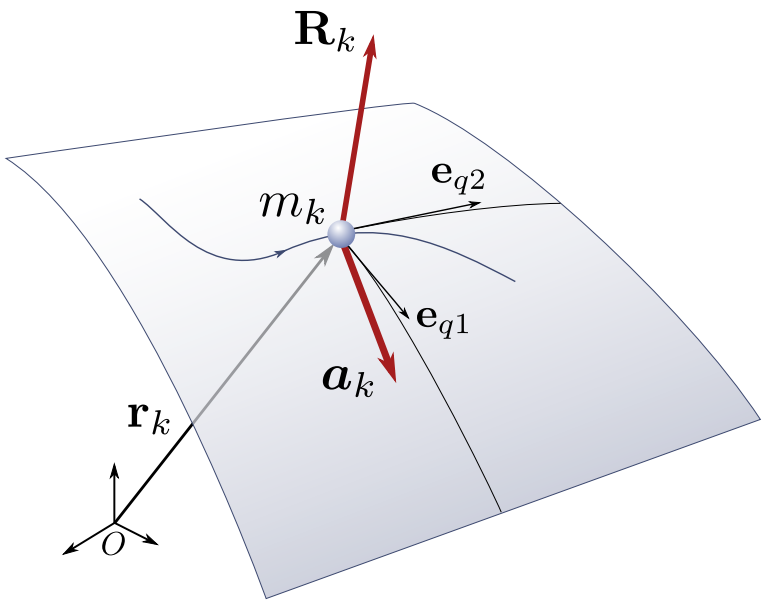
получим:

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{a}'_n) = \mathbf{S}_n^T \mathbf{Q}_n + \mathbf{S}_n^T \mathbf{R}_n. \tag{7}$$

или

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = (\underbrace{\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n}_{\mathbf{U}_n})^{-1} \mathbf{S}_n^T (\mathbf{Q}_n + \mathbf{R}_n - \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}'_n)) \tag{8}$$

Механическая система с идеальными связями

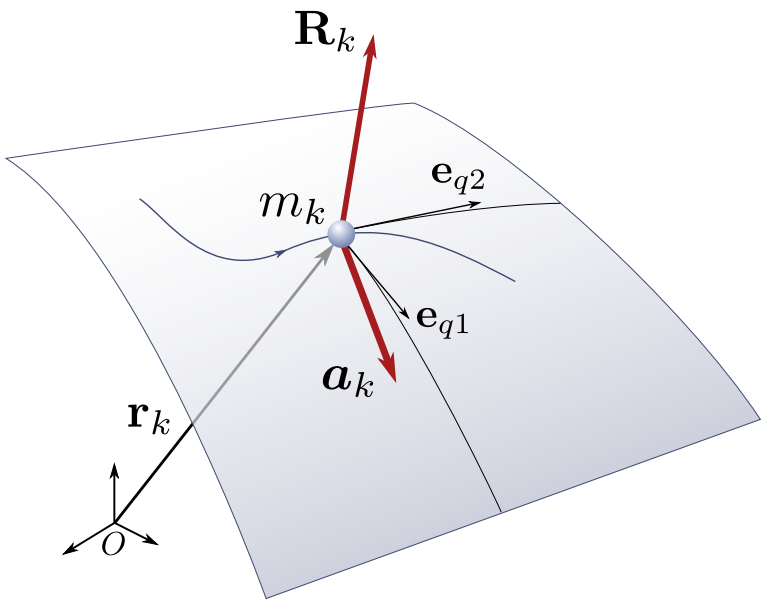


$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \begin{bmatrix} x_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ y_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ z_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \begin{bmatrix} \partial x_k/\partial q_1 & \partial x_k/\partial q_2 & \ldots & \partial x_k/\partial q_n \\ \partial y_k/\partial q_1 & \partial y_k/\partial q_2 & \ldots & \partial y_k/\partial q_n \\ \partial z_k/\partial q_1 & \partial z_k/\partial q_2 & \ldots & \partial z_k/\partial q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} = \mathbf{S}_n \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}} + \ldots$$

Матрица $\mathbf{S}_n$ и идеальные связи



$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} \partial x_k/\partial q_1 & \partial x_k/\partial q_2 & \dots & \partial x_k/\partial q_n \\ \partial y_k/\partial q_1 & \partial y_k/\partial q_2 & \dots & \partial y_k/\partial q_n \\ \partial z_k/\partial q_1 & \partial z_k/\partial q_2 & \dots & \partial z_k/\partial q_n \end{bmatrix}$$

Каждый столбец матрицы $\mathbf{S}_k$ – базисный вектор криволинейного базиса, касательного пространства:

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{q1} & \mathbf{e}_{q2} & \dots & \mathbf{e}_{qn} \end{bmatrix}$$

Для идеальных связей

$$\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{e}_{q1} = 0,\ \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{e}_{q2} = 0,\ \dots, \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{e}_{qn} = 0$$

или

$$\mathbf{S}_k^T \mathbf{R}_k = 0.$$

Обобщённые ускорения

С учётом

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{R}_n = \mathbf{0} \tag{9}$$

Выражение для вторых производных обобщённых координат

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = (\underbrace{\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n}_{\mathbf{U}_n})^{-1} \mathbf{S}_n^T (\mathbf{Q}_n + \mathbf{R}_n - \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}'_n)) \tag{10}$$

принимает вид:

$$\boxed{\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{S}_n^T \left[\mathbf{Q}_n - \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}'_n) \right]} \tag{11}$$

где

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n. \tag{12}$$

Обратный ход алгоритма метода отдельных тел

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{U}_n^{-1}\mathbf{S}_n^T\left[\mathbf{Q}_n - \mathbf{M}_n(\mathbf{C}_n\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}'_n)\right], \tag{13}$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{C}_n\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{S}_n\ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{a}'_n, \tag{14}$$

$$\mathbf{M}_n\mathbf{a}_n = \mathbf{Q}_n + \mathbf{R}_n, \tag{15}$$

$$\mathbf{M}_{n-1}\mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{R}_{n-1} + \mathbf{R}_n^*. \tag{16}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_n \to \mathbf{a}_n(\ddot{\mathbf{q}}_n) \to \boxed{\mathbf{m}_n\mathbf{a}_n = \ldots} \to \mathbf{R}_n(\mathbf{a}_{n-1}) \to \boxed{\mathbf{m}_{n-1}\mathbf{a}_{n-1} = \ldots}$$

$$\mathbf{M}_{n-1}^*\mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1}^* + \mathbf{R}_{n-1}, \quad n \to k$$

где

$$\mathbf{M}_{n-1}^* = \mathbf{M}_{n-1} + \mathbf{C}_n^T\mathbf{M}_n\mathbf{C}_n - \mathbf{C}_n^T\mathbf{M}_n\mathbf{S}_n\mathbf{U}_n^{-1}\mathbf{S}_n^T\mathbf{M}_n\mathbf{C}_n,$$

$$\mathbf{Q}_{n-1}^* = \mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{C}_n^T\left(\mathbf{M}_n\left(\mathbf{S}_n\mathbf{U}_n^{-1}\mathbf{S}_n^T(\mathbf{Q}_n - \mathbf{M}_n\mathbf{a}'_n) + \mathbf{a}'_n\right) - \mathbf{Q}_n\right).$$

Алгоритм

Обратный ход алгоритма $(k = n, n-1, n-2, \ldots, 2)$

$$\mathbf{M}^*_{k-1} = \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}^*_k \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}^*_k \mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^{-1*} \mathbf{S}_k^T \mathbf{M}^*_k \mathbf{C}_k, \tag{17}$$

$$\mathbf{Q}^*_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1} + \mathbf{C}_k^T \left(\mathbf{M}^*_k \left(\mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^{-1*} \mathbf{S}_k^T (\mathbf{Q}^*_k - \mathbf{M}^*_k \mathbf{a}'_k) + \mathbf{a}'_k \right) - \mathbf{Q}^*_k \right), \tag{18}$$

$$\mathbf{U}^*_k = \mathbf{S}_k^T \mathbf{M}^*_k \mathbf{S}_k. \tag{19}$$

$$\boxed{\mathbf{M}_n, \mathbf{Q}_n \to \mathbf{M}^*_{n-1}, \mathbf{Q}^*_{n-1} \to \mathbf{M}^*_{n-2}, \mathbf{Q}^*_{n-2} \to \ldots \to \mathbf{M}^*_1, \mathbf{Q}^*_1}$$

Прямой ход алгоритма $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$

$$\ddot{\mathbf{q}}_k = \mathbf{U}_k^{*-1} \mathbf{S}_k^T \left(\mathbf{Q}^*_k - \mathbf{M}^*_k (\mathbf{C}_k \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}'_k) \right) \tag{20}$$

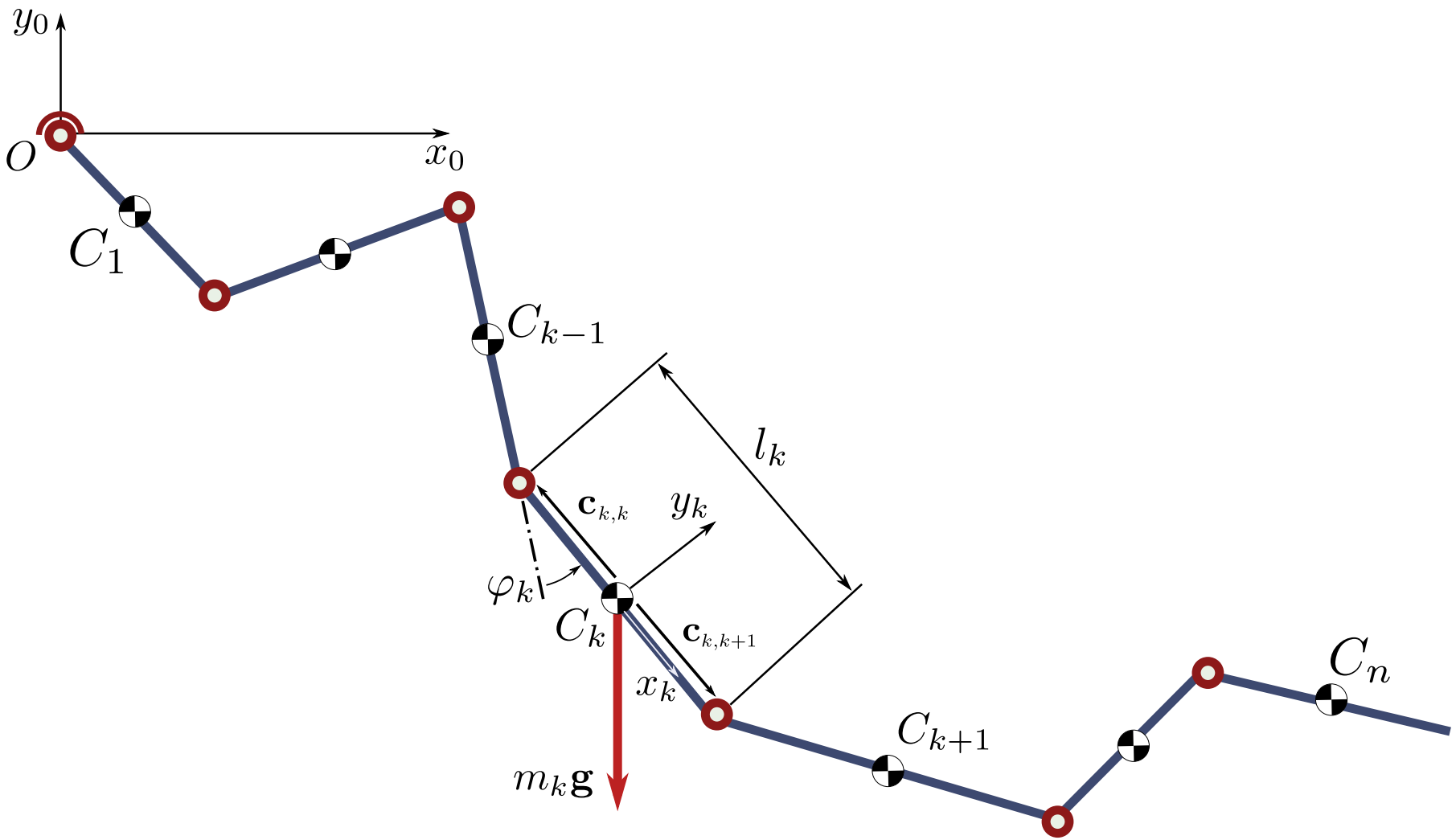
$$\mathbf{a}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{S}_k \ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{a}'_k. \tag{21}$$

Ускорение тела «0» известно. Если «0» тело неподвижно, то это ускорение равно 0.

$$\boxed{\ddot{\mathbf{q}}_1(\mathbf{w}_0), \mathbf{w}_1 \to \ddot{\mathbf{q}}_2(\mathbf{a}_1), \mathbf{a}_2, \to \ldots \to \ddot{\mathbf{q}}_n(\mathbf{a}_{n-1}), \mathbf{a}_n}$$

Пример программы (MATLAB)
Плоская система стержней, последовательно соединённых цилиндрическими шарнирами

Схема системы



Структура файлов

		`getSk.m`	$\mathbf{S}_k$
		`getCk.m`	$\mathbf{C}_k$
`main.m`	`dqdt.m`	`getWprim.m`	$\mathbf{a}'_k$
		`getMkQkiUk.m`	$\mathbf{M}^*_k, \mathbf{Q}^*_k, \mathbf{U}_k$
		`getA.m`	$\mathbf{A}_k$

Главный файл-скрипт I

```
global Model;
Model=struct;
```

Количество тел

```
n=10; Model.n=n;
```

Шарнирные векторы: $\mathbf{c}_{k,k+1}^{(k)} = \begin{bmatrix} l_k/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l/2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_{k,k}^{(k)} = -\begin{bmatrix} l_k/2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} l/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

```
c=mat2cell(zeros(n*2,n),ones(1,n)*2,ones(1,n));
for i=1:n
    c{i,i}=0.5*[-1;0]/n;
    if i~=n
        c{i,i+1}=0.5*[+1;0]/n;
    end
end
Model.c=c;
```

Главный файл-скрипт II

Матрицы масс

```
mass=cell(n,1); m=10;
for i=1:n
    mass{i}=[m/n 0 0; 0 m/n 0; 0 0 m/(12*n*n*n)];
end
Model.mass=mass;
```

Начальные условия

```
q0=zeros(n*2,1); q0(1)=-1.0;
```

Интегрирование

```
[t,q]=ode113(@dqdt,[0 10],q0);
```

Файл-функция правых частей ДУ I

$$[\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \ldots, \dot{\varphi}_n, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \ldots, \ddot{\varphi}_n] = \mathsf{dqdt}(t, [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \ldots, \dot{\varphi}_n])$$

```
function dx = dqdt(t,x)
  global Model;
  n=size(x,1)/2;
  q =x(1:n);
  dq=x(n+1:2*n);
  dx=[dq;dq];
```

Матрицы преобразования координат $\mathbf{A}_i$ из базиса тела i в базис 0:

```
  A0=cell(n,1);
  A0{1}=getA(q(1));
  for i=2:n
    A0{i}=A0{i-1}*getA(q(i));
  end
```

Файл-функция правых частей ДУ II

Силы и моменты

```
Q=cell(n,1);
for i=1:n
  Q{i}=[0;-Model.mass{i}(1,1)*9.81;0];
end
```

Обратный ход алгоритма.

Вычисление матриц $\mathbf{M}_k^*, \mathbf{Q}_k^*, \mathbf{U}_k^{-1}$

```
[Mk,Qk,iUk]=getMkQkiUk(q,dq,Model.mass,Model.c,Q,A0);
```

Файл-функция правых частей ДУ III

Прямой ход алгоритма. Вычисление $\ddot{\mathbf{q}}_k, \mathbf{a}_k$.

```
  w=[0;0;0];
  for i=1:n
    Ck=getCk(i, q, dq, Model.c, A0);
    Sk=getSk(i, q, dq, Model.c, A0);
    Wp=getWprim(i, q, dq, Model.c, A0);
    dx(n+i)=iUk{i}*Sk'*(Qk{i}-Mk{i}*(Ck*w+Wp));
    w=Ck*w+Sk*dx(n+i)+Wp;
  end
end
```

Файл-функция getMkQkiUk (обратный ход алгоритма) I

```
function [Mk,Qk,iUk] = getMkQkiUk(q,dq,masses,c,Q,A0)
 n=size(q,1);
 Mk=cell(n,1);
 Qk=cell(n,1);
 iUk=cell(n,1);
 Mk{n}=masses{n};
 Qk{n}=Q{n};
```

Файл-функция getMkQkiUk (обратный ход алгоритма) II

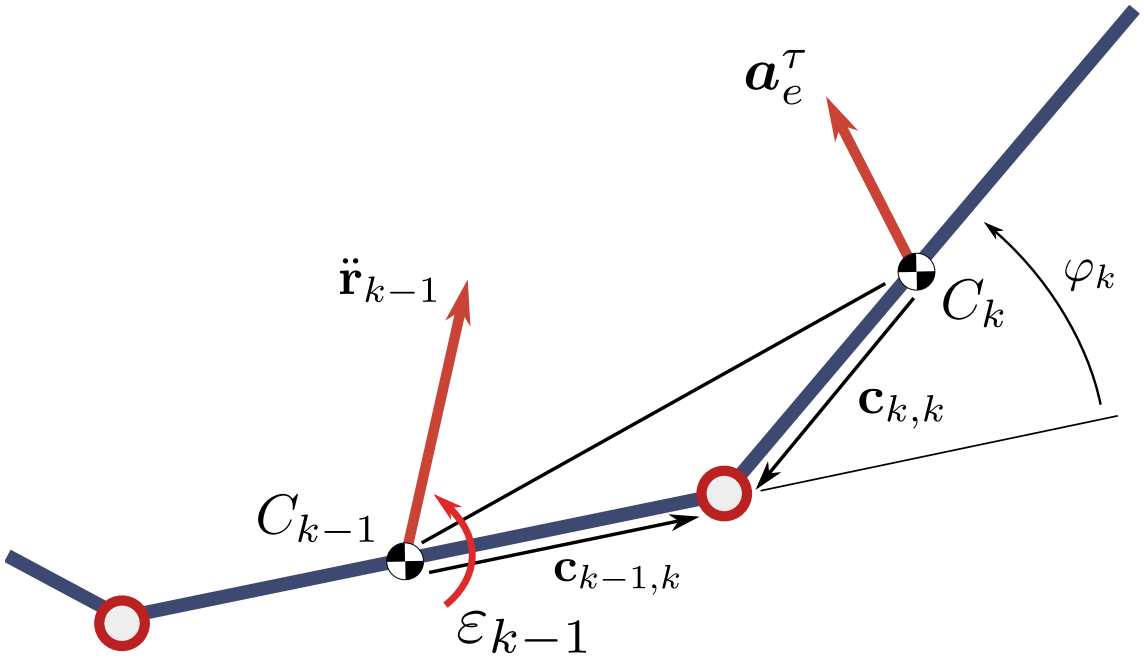
```
 for k=n:-1:1
  Ck=getCk(k,q,dq,c,A0);
  Sk=getSk(k,q,dq,c,A0);
  Wprim=getWprim(k, q, dq, c, A0);
  U=Sk'*Mk{k}*Sk;
  iUk{k}=inv(U);
  if k>1
   Mk{k-1}=masses{k-1}+Ck'*Mk{k}*Ck-Ck'*Mk{k}*...
           Sk*iUk{k}*Sk'*Mk{k}*Ck;
   Qk{k-1}=Q{k-1}-Ck'*(Mk{k}*(Sk*iUk{k}*Sk'*...
           (Qk{k}-Mk{k}*Wprim)+Wprim)-Qk{k});
  end
 end % for

end
```

Файл-функция getCk

Коэффициенты при ускорениях $\mathbf{a}_{k-1}$ в выражении

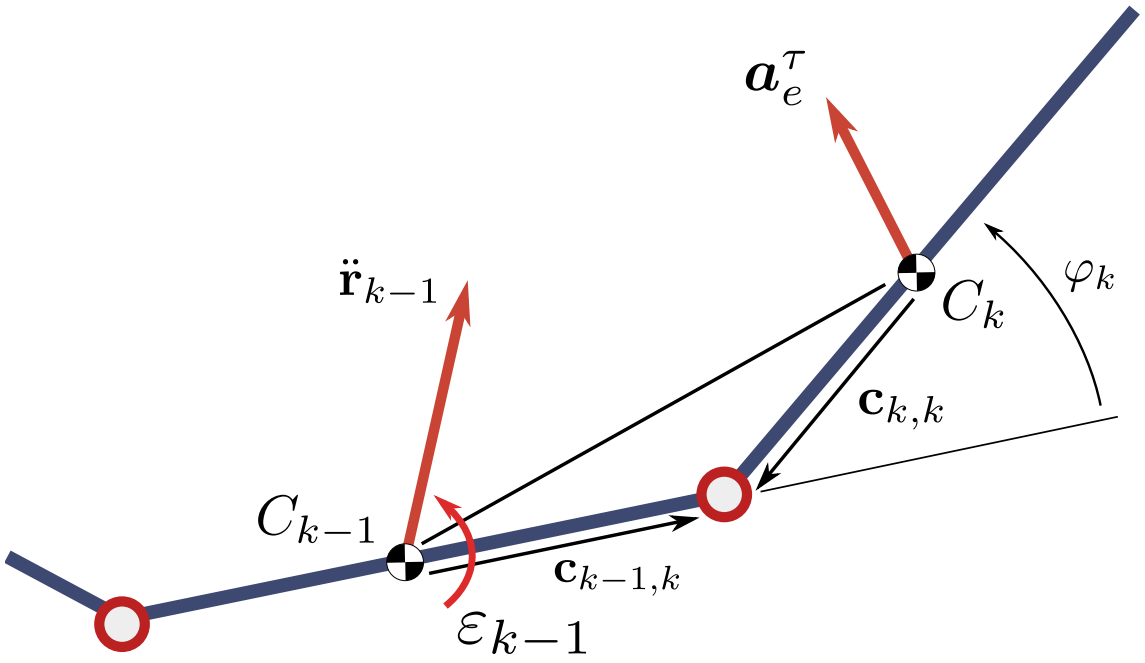
$$\mathbf{a}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{S}_k \ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{a}'_k \tag{22}$$



$$\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{k-1} \\ \ddot{y}_{k-1} \\ \varepsilon_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{-\pi/2}(\mathbf{A}_k \mathbf{c}_{kk}^{(k)} - \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{c}_{k,k-1}^{(k-1)}) \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_{k-1} + \dots$$

Файл-функция getCk

$$\mathbf{a}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{2\times 2} & \mathbf{A}_{-\pi/2}(\mathbf{A}_k \mathbf{c}_{kk}^{(k)} - \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{c}_{k,k-1}^{(k-1)}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_k} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{k-1} \\ \ddot{y}_{k-1} \\ \varepsilon_{k-1} \end{bmatrix} + \dots$$

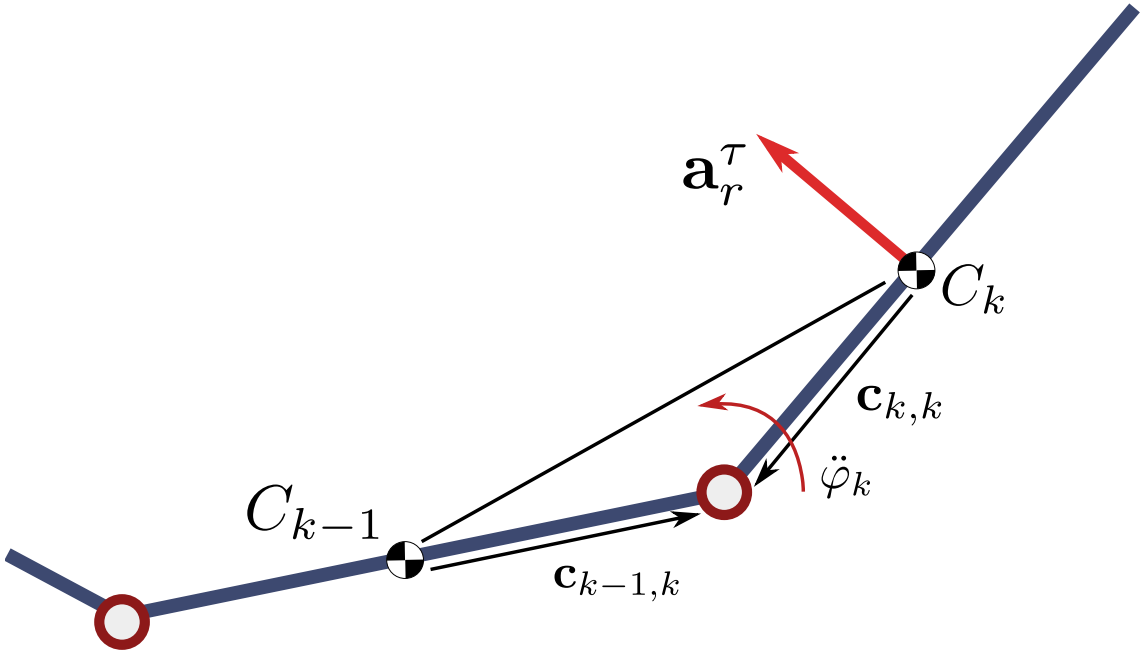


Файл-функция getCk

```
function ck = getCk(k, q, dq, c, A0)
 ck=eye(3,3);
 if k==1
  ck(1:2,3)=-[0 1;-1 0]*(-A0{k}*c{k,k});
 else
  ck(1:2,3)=-[0 1;-1 0]*(A0{k-1}*c{k-1,k}-A0{k}*c{k,k});
end
```

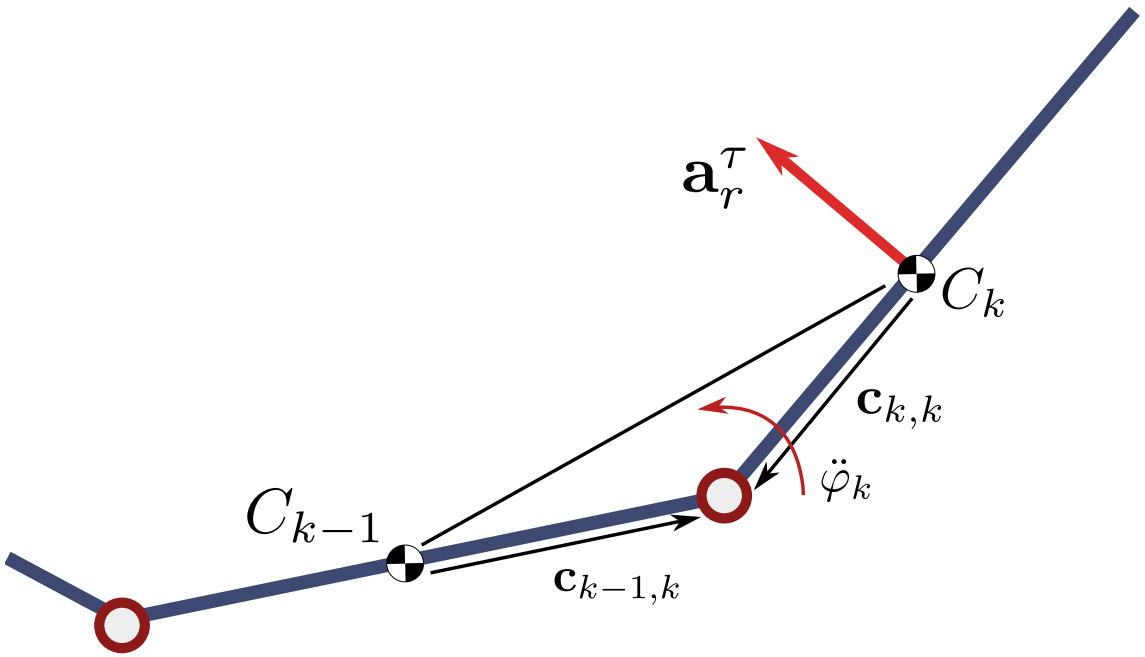
Файл-функция getSk

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{S}_k \ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{a}'_k \tag{23}$$



Файл-функция getSk

$$\mathbf{S}_k\ddot{\mathbf{q}}_k = \mathbf{S}_k\ddot{\varphi}_k = \begin{bmatrix} a^{\tau}_{r_x} \\ a^{\tau}_{r_y} \\ \ddot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{-\pi/2}\mathbf{A}_k\mathbf{c}_{kk} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_k. \tag{24}$$



Файл-функция getSk

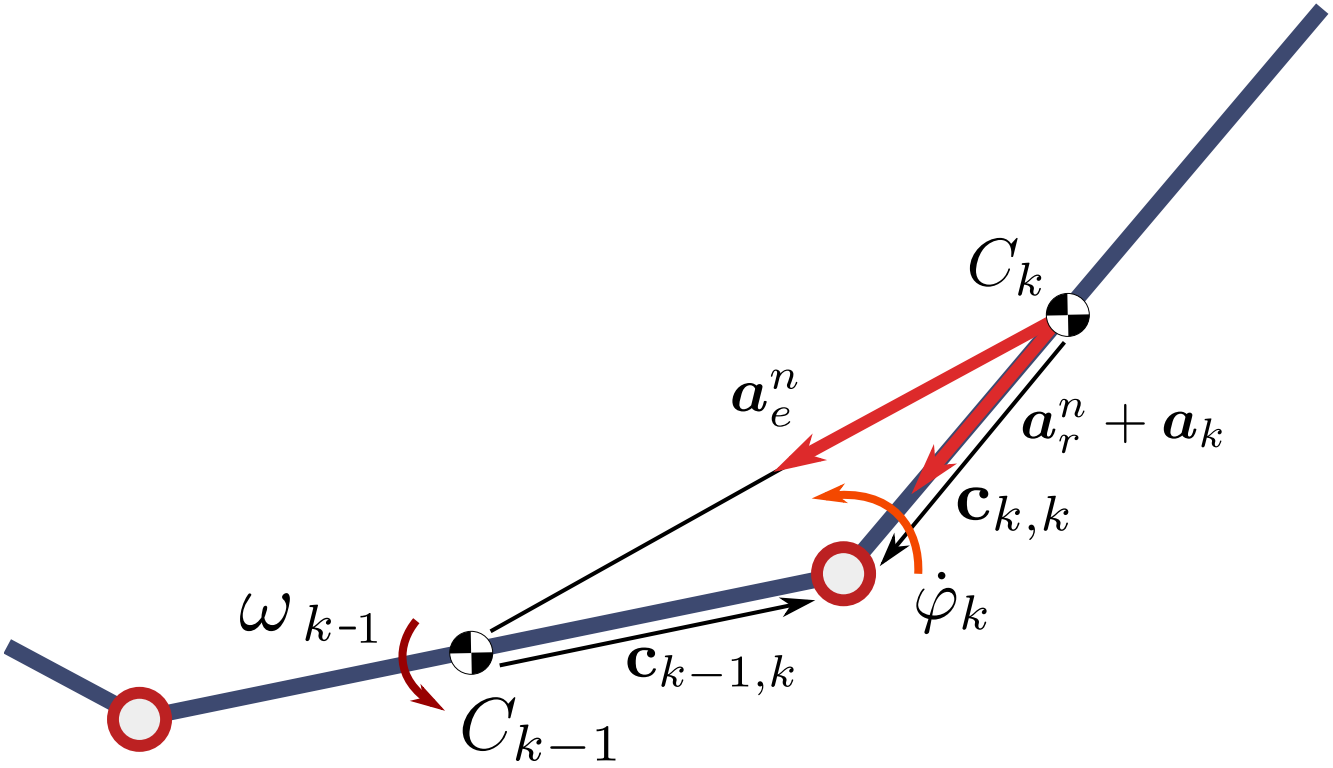
$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{-\pi/2}\mathbf{A}_k\mathbf{c}_{kk} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

```
function sk = getSk(k, q, dq, c, A0)
  sk=[0;0;1];
  sk(1:2)=[0 1;-1 0]*A0{k}*c{k,k};
end
```

Файл-функция getWprim

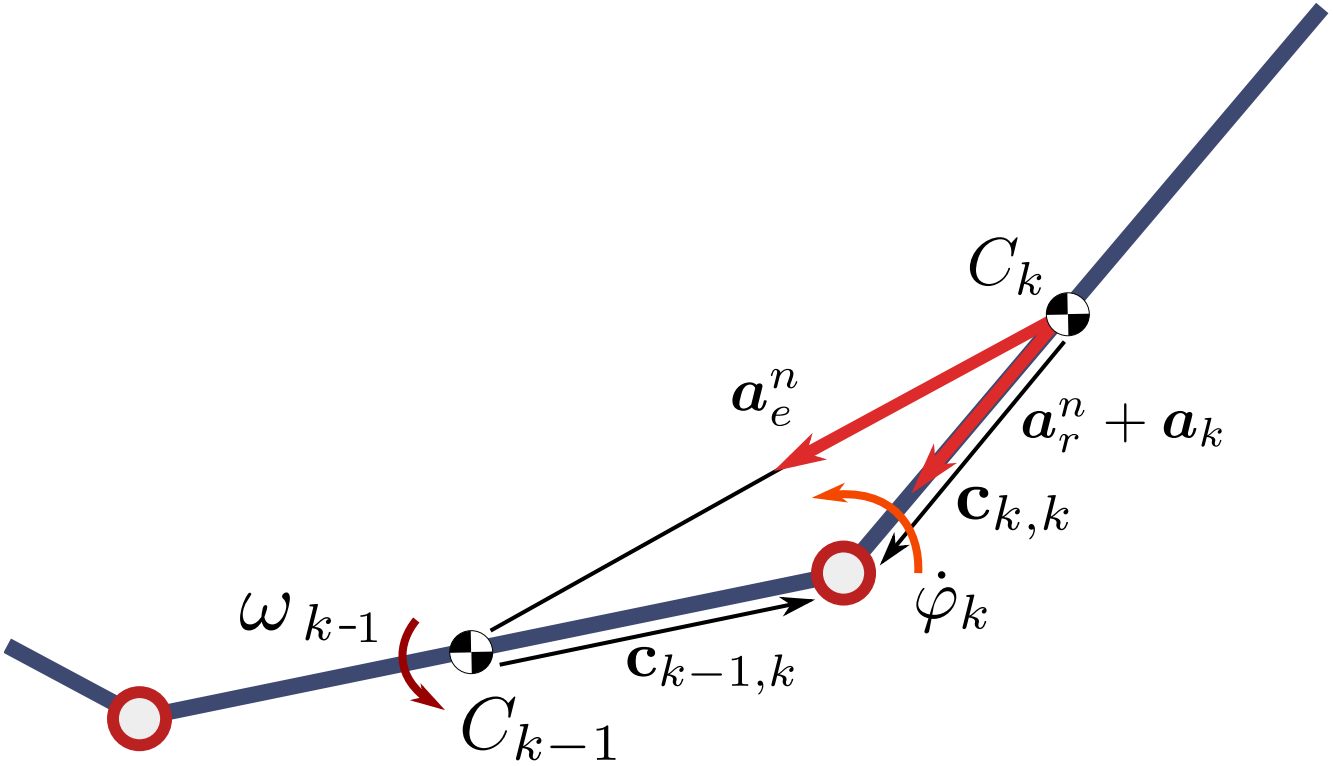
Составляющие ускорения, не зависящие от вторых производных обобщённых координат $\ddot{\mathbf{q}}$.

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{S}_k \ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{a}'_k \tag{26}$$



Файл-функция getWprim

$$\mathbf{a}'_k = \underbrace{-\mathbf{c}_{k-1,k}\omega_{k-1}^2 + \mathbf{c}_{kk}\omega_{k-1}^2}_{\boldsymbol{a}_e^n} + \underbrace{2\mathbf{c}_{kk}\dot{\varphi}_k\omega_{k-1}}_{\boldsymbol{a}_k} + \underbrace{\mathbf{c}_{kk}\dot{\varphi}_k^2}_{\boldsymbol{a}_r^n} \tag{27}$$



Файл-функция getWprim

$$\mathbf{a}'_k = -\mathbf{c}_{k-1,k}\omega_{k-1}^2 + \mathbf{c}_{kk}\omega_{k-1}^2 + 2\mathbf{c}_{kk}\dot{\varphi}_k\omega_{k-1} + \mathbf{c}_{kk}\dot{\varphi}_k^2. \tag{28}$$

```
function  wprim=getWprim(k, q, dq, c, A0)
 if k==1
   wprim=[(dq(k)+0)^2*A0{k}*c{k,k};0];
 else
   wkp=sum(dq(1:k-1));
   wprim=[(dq(k)+wkp)^2*A0{k}*c{k,k}-wkp*wkp*A0{k-1}*c{k-1,k};0];
 end
end
```

Файл-функция getA

Матрица плоского поворота, преобразующая координаты из базиса $\mathbf{e}^2$, повёрнутого вокруг оси z относительно базиса $\mathbf{e}^1$, в базис $\mathbf{e}^1$.

```
function A = getA(angle)
  A=[cos(angle) -sin(angle);sin(angle) cos(angle)];
end
```

Список использованных источников

1. *Верещагин, А. Ф.* Компьютерное моделирование динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов / А. Ф. Верещагин // Инженерная кибернетика, вып. 6. — 1974. — С. 65–70.
2. *Дмитроченко, О. Н.* Эффективные методы численного моделирования динамики нелинейных систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел: Дис... канд. физ. мат. наук: 01.02.01. – М., 2003. – 125 с.
3. *Joel Storch and Stephen Gates*, Motivating Kane's Method for Obtaining Equations of Motion for Dynamic System. Engineering Notes, Vol. 12, N. 4, July-August 1989.