Ортогональные матрицы

Динамика твёрдого тела и систем тел

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики
Самарский университет

1 сентября 2024 г.

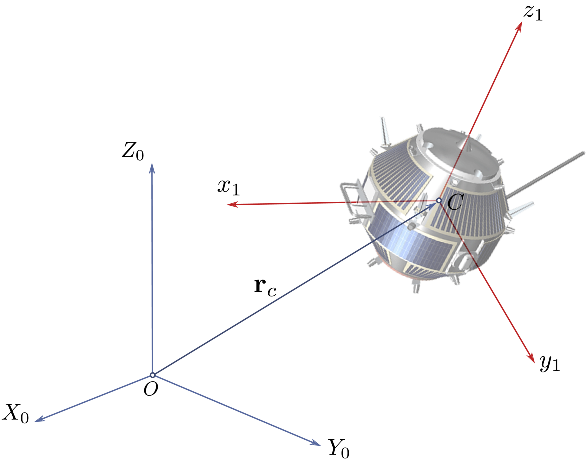
САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Содержание

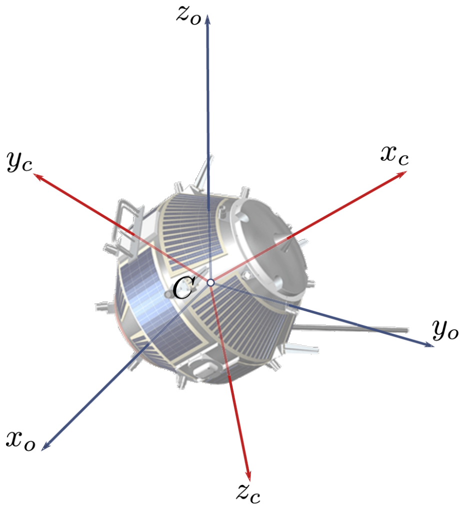
Способы задания ориентации твёрдого тела

Ориентация твёрдого тела

Произвольное движение твёрдого тела складывается из движения произвольной точки твёрдого тела (полюса) и вращения тела вокруг этого полюса.



Ориентация твёрдого тела



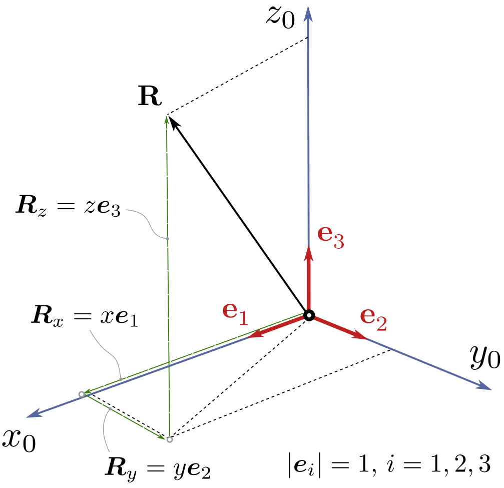
- $Cx_cy_cz_c$ – система координат, связанная с твёрдым телом;
- $Cx_oy_oz_o$ – поступательно движущаяся система координат с началом в точке C.
- Ориентация системы координат $Cx_cy_cz_c$ относительно $Cx_oy_oz_o$ может быть задана несколькими способами.

Способы задания ориентации твёрдого тела

- Матрица направляющих косинусов: $n = 9$.
- Система плоских поворотов (углы Эйлера, углы Брайнта): $n = 3$.
- Кватернионы, параметры Кейли-Клейна: $n = 4$.

Ортогональные матрицы

Координаты вектора

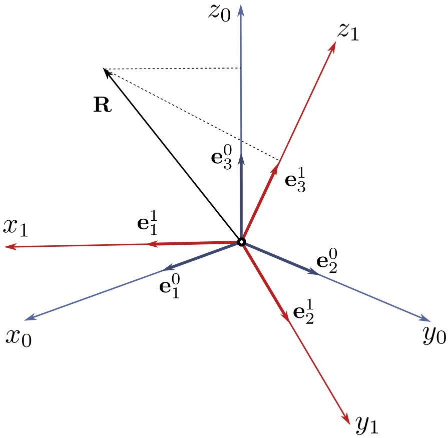


Вектор $\vec{R}$ можно представить как линейную комбинацию базисных векторов:

$$\vec{R} = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 + z \cdot \mathbf{e}_3 = \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ = \mathbf{e}^T \boldsymbol{R},$$

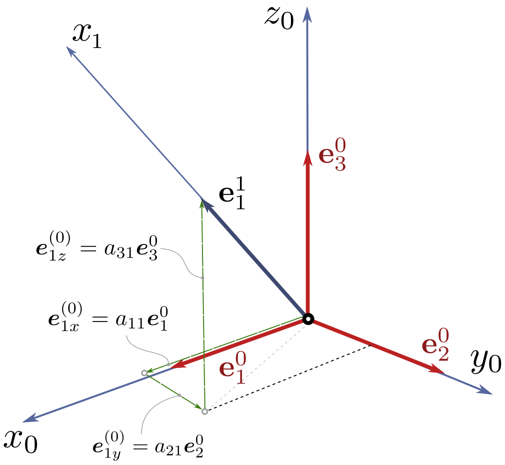
где $\boldsymbol{R}$ – координатный столбец вектора $\vec{R}$ в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T$.

Координаты вектора в разных базисах



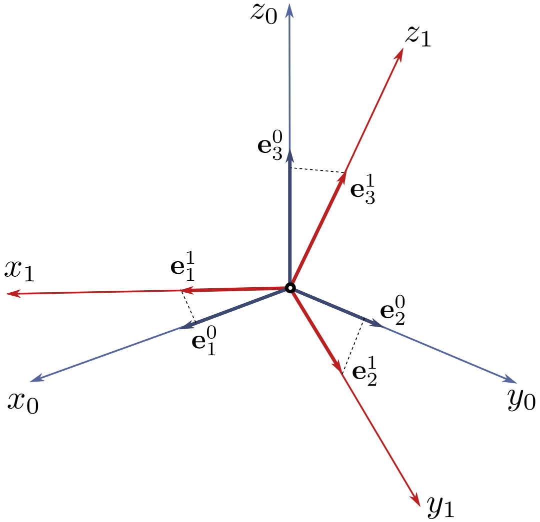
- $\mathbf{R}^{(0)} = (x_0, y_0, z_0)^T$ – координаты вектора в базисе $\mathbf{e}^0$;
- $\mathbf{R}^{(1)} = (x_1, y_1, z_1)^T$ – координаты вектора в базисе $\mathbf{e}^1$.

Координаты базисных векторов



$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^1 = {} & \mathbf{e}_1^0 \cdot |\mathbf{e}_1^1| \cos\alpha_{11} + \\
& \mathbf{e}_2^0 \cdot |\mathbf{e}_1^1| \cos\alpha_{21} + \\
& \mathbf{e}_3^0 \cdot |\mathbf{e}_1^1| \cos\alpha_{31} = \\
= {} & \mathbf{e}_1^0 \cos\alpha_{11} + \\
& \mathbf{e}_2^0 \cos\alpha_{21} + \\
& \mathbf{e}_3^0 \cos\alpha_{31} = \\
= {} & \mathbf{e}_1^0 a_{11} + \\
& \mathbf{e}_2^0 a_{21} + \\
& \mathbf{e}_3^0 a_{31}.
\end{aligned}
$$

Направляющие косинусы



$$
\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_1^1 \\
\alpha_{21} &= \angle \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_1^1 \\
\alpha_{31} &= \angle \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_1^1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{12} &= \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^1 \\
\alpha_{22} &= \angle \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_2^1 \\
\alpha_{32} &= \angle \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_2^1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{13} &= \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_3^1 \\
\alpha_{23} &= \angle \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^1 \\
\alpha_{33} &= \angle \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_3^1
\end{aligned}
$$

Матрица направляющих косинусов

Скалярное произведение двух базисных векторов различных базисов равно косинусу угла между ними:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{e}_1^1 = \cos \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_1^1, & a_{12} &= \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{e}_2^1, & a_{13} &= \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{e}_3^1, \\
a_{21} &= \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{e}_1^1, & a_{22} &= \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{e}_2^1, & a_{23} &= \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{e}_3^1, \\
a_{31} &= \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{e}_1^1, & a_{32} &= \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{e}_2^1, & a_{33} &= \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{e}_3^1.
\end{aligned}$$

Матрица направляющих косинусов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица направляющих косинусов

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

i-ый столбец матрицы $\mathbf{A}$ представляет собой координаты единичного вектора $\mathbf{e}_i^1$ в базисе $\mathbf{e}^0$:

$$(\mathbf{e}_1^1)^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \ (\mathbf{e}_2^1)^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \ (\mathbf{e}_3^1)^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}.$$

Преобразование координат вектора

В базисе $\mathbf{e}^1$:

$$\mathbf{R}^{(1)} = x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1.$$

В базисе $\mathbf{e}^0$:

$$\mathbf{R}^{(0)} = x\,\mathbf{e}_1^0 + y\,\mathbf{e}_2^0 + z\,\mathbf{e}_3^0.$$

Координаты вектора в базисе $\mathbf{e}^0$:

$$\begin{aligned}
x &= \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{e}_1^0 \cdot (x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1) = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z',\\
y &= \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{e}_2^0 \cdot (x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1) = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z',\\
z &= \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{e}_3^0 \cdot (x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1) = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'.
\end{aligned}$$

В матричной форме:

$$\mathbf{R}^{(0)} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{R}^{(1)}.$$

Ортогональное преобразование

Матрица $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

задаёт линейное отображение трёхмерного евклидового пространства в себя, при котором расстояние между произвольными точками неизменны:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}'^T\mathbf{R}'.$$

Линейность:

$\mathbf{A}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1) = \mathbf{A}\mathbf{R}_1 + \mathbf{A}\mathbf{R}_2$

$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{R}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{R}$

Активная и пассивная точки зрения

Активная и пассивная точки зрения

Преобразование координат можно рассматривать с двух точек зрения.

- Активная точка зрения – поворачивается вектор в неизменном базисе:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{R}', \tag{1}$$

Активная и пассивная точки зрения

Преобразование координат можно рассматривать с двух точек зрения.

- Активная точка зрения – поворачивается вектор в неизменном базисе:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{R}', \tag{1}$$

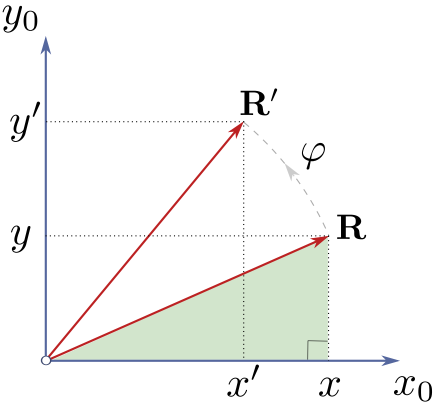
- Пассивная точка зрения – поворачивается базис

$$\mathbf{e}^1 \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{e}^2, \tag{2}$$

  определяются координаты неизменного вектора в новом базисе.

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}'. \tag{3}$$

Активная точка зрения



$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}.$$

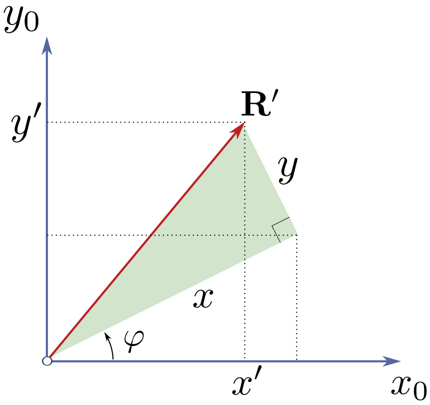
Матрица поворота вокруг оси z:

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Координаты нового вектора:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Активная точка зрения



$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}.$$

Матрица поворота вокруг оси z:

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Координаты нового вектора:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Матрицы поворота вокруг осей

Поворот вокруг оси x:

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Поворот вокруг оси y:

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Поворот вокруг оси z:

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Пассивная точка зрения

$$\mathbf{R} = x \cdot \mathbf{e}_1^0 + y \cdot \mathbf{e}_2^0 + z \cdot \mathbf{e}_3^0 = x' \cdot \mathbf{e}_1^1 + y' \cdot \mathbf{e}_2^1 + z' \cdot \mathbf{e}_3^1 \tag{8}$$

Исходный базис:

$$\mathbf{e}_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Новый базис:

$$\mathbf{e}_1^1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1^0, \ \mathbf{e}_2^1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_2^0, \ \mathbf{e}_3^1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_3^0.$$

Сложение поворотов

Пассивная точка зрения

Из уравнения (8)

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} y + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} z}_{x\mathbf{e}_1^0 + y\mathbf{e}_2^0 + z\mathbf{e}_3^0} = \underbrace{\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} x' + \mathbf{A}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} y' + \mathbf{A}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} z'}_{x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$$

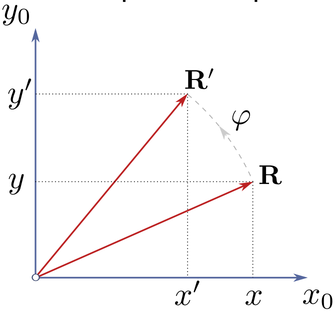
определяются координаты вектора в новом базисе:

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, \qquad \boxed{\mathbf{R}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}}$$

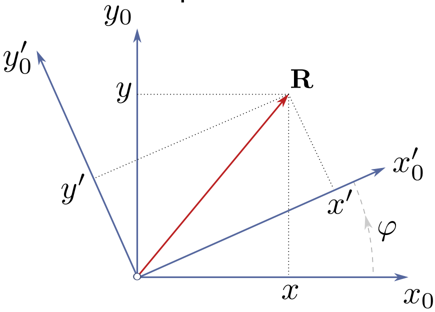
Координаты вектора в новом базисе определяются при помощи матрицы, обратной матрице поворота базиса

Матрица поворота

Поворот вектора



Поворот базиса



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства матрицы поворота

Ортогональность

При преобразовании поворота $\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}$ сохраняется модуль вектора $|\mathbf{R}'| = |\mathbf{R}|$, поэтому

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}'^T\mathbf{R}' = (\mathbf{A}\mathbf{R})^T\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{R} \Rightarrow \boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}}$$

или:

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T} \tag{9}$$

Из $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 1$ следует:

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \pm 1} \tag{10}$$

Ортогональность

- Если $\det(\mathbf{A}) = +1$,
  $\mathbf{A}$ определяет собственное ортогональное преобразование – поворот вокруг некоторой оси.
- Если $\det(\mathbf{A}) = -1$,
  $\mathbf{A}$ определяет несобственное ортогональное преобразование – композиция поворота вокруг оси и отражения в перпендикулярной плоскости.

Ортогональность

Скалярное произведение строки (столбца) на саму себя равно 1, на любую другую строку (столбец) равно 0:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \to \begin{aligned} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0, \\ a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{13}a_{13} &= 1, \\ \ldots & \end{aligned}$$

В общем виде:

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \quad \sum_i a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}.$$

Произведение двух матриц поворота

Произведение двух ортогональных матриц есть тоже ортогональная матрица.
Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ортогональные матрицы, тогда:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \ \rightarrow \ \mathbf{C}^T = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{CC}^T = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^T)\mathbf{A}^T = \mathbf{E}.$$

Алгебраическое дополнение

Элементы ортогональной матрицы равны их алгебраическим дополнениям

$$\boxed{a_{ij} = A_{ij}}$$

т.к.

$$\mathbf{A}^{-1} = (A_{ij})^T / \mathrm{det}\mathbf{A} \text{ и } \mathrm{det}\mathbf{A} = 1$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij} – дополнительный минор – определитель матрицы, получающийся из исходной матрицы $\mathbf{A}$ вычёркиванием i-го столбца и j-ой строки.

Собственные векторы и значения

- Уравнение для определения собственных чисел и собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$:

$$\boxed{\mathbf{AR} = \lambda\mathbf{R}} \tag{11}$$

где собственное число $|\lambda| = 1$, так как ортогональное преобразование не изменяет длины вектора $\mathbf{R}$.

- Собственные числа находятся из скалярного уравнения:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0.$$

Определение собственных значений

Уравнение $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{Vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{Vmatrix}$$

приводится к кубическому уравнению

$$\boxed{\lambda^3 - \lambda^2 \mathrm{tr}\mathbf{A} + \lambda \mathrm{tr}\mathbf{A} - 1 = 0} \qquad (12)$$

где $\mathrm{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

Собственные значения

$$\boxed{\lambda^3 - \lambda^2 \mathrm{tr}\mathbf{A} + \lambda \mathrm{tr}\mathbf{A} - 1 = 0}$$

- Первый корень уравнения для ортогональной матрицы $\mathbf{A}$ равен $+1$.
- Два других корня – комплексно-сопряженные:

$$\boxed{\lambda_1 = 1, \;\; \lambda_{2,3} = \frac{\mathrm{tr}\mathbf{A} - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\mathrm{tr}\mathbf{A} - 1)^2}{4} - 1}}$$

Тригонометрическая форма представления комплексно-сопряженных собственных чисел с модулем 1:

$$\boxed{\lambda_{2,3} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi, \;\; \cos\varphi = \frac{\mathrm{tr}A - 1}{2}}$$

Тригонометрическая форма

Комплексно-сопряженные собственные числа с модулем равным +1:

$$\lambda_{2,3} = \frac{\mathrm{tr}\mathbf{A} - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\mathrm{tr}\mathbf{A} - 1)^2}{4} - 1}$$

можно представить в тригонометрической форме:

$$\boxed{\lambda_{2,3} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi,\ \cos\varphi = \frac{\mathrm{tr}A - 1}{2}}$$

Собственные векторы

- Собственные векторы $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ определяются из уравнения (11):

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_k = \lambda_k \mathbf{R}_k,\ \ k = 1, 2, 3.$$

- Собственному числу $\lambda_1 = 1$ соответствует действительный вектор $\mathbf{R}_1 = (x, y, z)^T$, определяемый решением СЛУ:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (a_{11} - 1)x + a_{12}y + a_{13}z & = & 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - 1)y + a_{23}z & = & 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - 1)z & = & 0, \end{array} \right. \tag{13}$$

с дополнительным требованием единичной нормы вектора $\mathbf{R}_1$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Первый собственный вектор

Решение системы (13):

$$x = \pm\frac{a_{32} - a_{23}}{2\sin\varphi}, \quad y = \pm\frac{a_{13} - a_{31}}{2\sin\varphi}, \quad z = \pm\frac{a_{21} - a_{12}}{2\sin\varphi}.$$

Для матрицы поворота вокруг оси x

$$x = +\frac{\sin\varphi + \sin\varphi}{2\sin\varphi} = +1, \quad y = \frac{0 - 0}{2\sin\varphi} = 0, \quad z = \frac{0 - 0}{2\sin\varphi} = 0.$$

Для правого поворота

$$x = 1, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Второй и третий собственные векторы

- Векторы, соответствующие двум комплексно-сопряженным корням, также являются комплексно-сопряжёнными:

$$\mathbf{R}_{2,3} = \mathbf{P} \mp i\mathbf{Q}.$$

- Векторы $\mathbf{R}_1, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ образуют правую тройку ортогональных векторов.

Ортогональные матрицы и поворот

Теорема

Любое ортогональное преобразование пространства эквивалентно повороту пространства вокруг собственного вектора $\mathbf{R}_1$ *на угол* φ.

Ортогональные матрицы и поворот

Запишем уравнения:

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_k = \lambda_k \mathbf{R}_k, \quad k = 1, 2, 3 \tag{14}$$

для всех собственных векторов:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{R}_1 &= 1 \cdot \mathbf{R}_1, \\
\mathbf{A}(\mathbf{P} - i\mathbf{Q}) &= \mathbf{A}\mathbf{P} - i\mathbf{A}\mathbf{Q} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\mathbf{P} - i\mathbf{Q}), \\
\mathbf{A}(\mathbf{P} + i\mathbf{Q}) &= \mathbf{A}\mathbf{P} + i\mathbf{A}\mathbf{Q} = (\cos\varphi - i\sin\varphi)(\mathbf{P} + i\mathbf{Q}).
\end{aligned}$$

или

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1, \tag{15}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = +\mathbf{P}\cos\varphi + \mathbf{Q}\sin\varphi, \tag{16}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = -\mathbf{P}\sin\varphi + \mathbf{Q}\cos\varphi. \tag{17}$$

Ортогональные матрицы и поворот

Доказательство

Если оси исходного базиса направлены по векторам $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$:

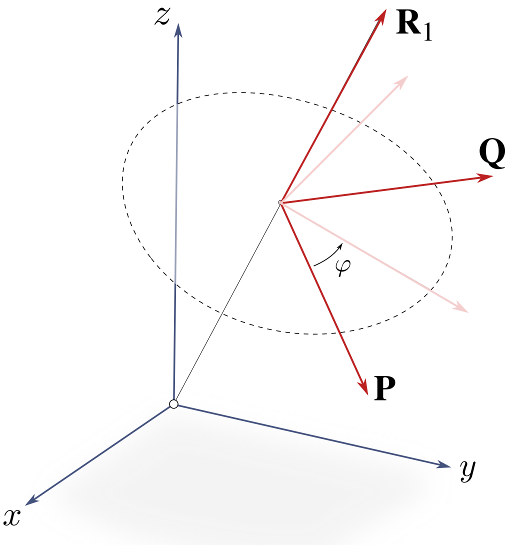
$$\mathbf{R}_1 = \{1, 0, 0\},\ \mathbf{P} = \{0, 1, 0\},\ \mathbf{Q} = \{0, 0, 1\},$$

то

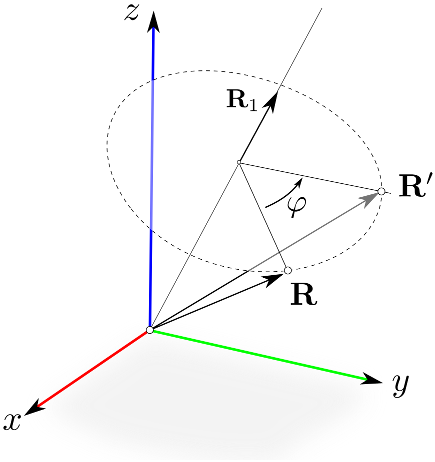
$$\{\mathbf{A}\mathbf{R}_1, \mathbf{A}\mathbf{P}, \mathbf{A}\mathbf{Q}\} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в базисе $\mathbf{R}_1, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ ортогональная матрица $\mathbf{A}$ имеет вид матрицы плоского поворота вокруг вектора $\mathbf{R}_1$ на угол φ.

Ортогональные матрицы и поворот



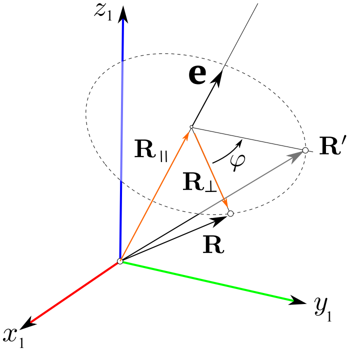
Ортогональные матрицы и поворот



$$\mathbf{A}\mathbf{R}_1 = \lambda_1 \mathbf{R}_1,\ \ \lambda_1 = 1 \qquad (18)$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{tr}\mathbf{A} - 1}{2} \qquad (19)$$

Поворот вокруг оси $\mathbf{e}$ на угол φ



$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\parallel} + \mathbf{R}_{\perp}$$

$$\mathbf{R}_{\parallel} = (\mathbf{R}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} = (\mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{R}$$

$$\mathbf{R}_{\perp} = \mathbf{R} - (\mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{R} = (\mathbf{E} - \mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{R}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\parallel} + (\cos\varphi)\mathbf{R}_{\perp} + (\sin\varphi)\mathbf{e}\times\mathbf{R}$$

Поворот вокруг оси $\mathbf{e}$ на угол φ

$$\mathbf{AR} = \mathbf{R}_{\parallel} + (\cos\varphi)\mathbf{R}_{\perp} + (\sin\varphi)\mathbf{e}\times\mathbf{R}$$
$$\mathbf{AR} = (\mathbf{ee}^T)\mathbf{R} + (\sin\varphi)\mathbf{e}\times\mathbf{R} + (\cos\varphi)(\mathbf{E} - \mathbf{ee}^T)\mathbf{R}$$
$$\mathbf{AR} = \left\{\mathbf{E}\cos\varphi + \sin\varphi[\mathbf{e}\times] + (1-\cos\varphi)\mathbf{ee}^T\right\}\mathbf{R}$$
$$\mathbf{AR} = \left\{\mathbf{E} + \sin\varphi\tilde{\mathbf{e}} + (1-\cos\varphi)\tilde{\mathbf{e}}^2\right\}\mathbf{R}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{E} + \sin\varphi\tilde{\mathbf{e}} + (1-\cos\varphi)\tilde{\mathbf{e}}^2}$$

где

$$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix}$$

Сложение поворотов

Сложение поворотов

- Выполняется последовательность поворотов: $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{R}' \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbf{R}''. \qquad (20)$$

- Как найти результирующий поворот $\mathbf{C}$?

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{R}'', \quad \mathbf{C} - ? \qquad (21)$$

- Определение матрицы поворота $\mathbf{C}$ зависит от активной или пассивной точки зрения на преобразование.

Активная точка зрения

https://rutube.ru/video/c04e77a3530a95aaa4f08085a800c382/?r=wd

https://youtu.be/IgR5F35r6Qo

Активная точка зрения

- Первый поворот:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}.$$

- Второй поворот:

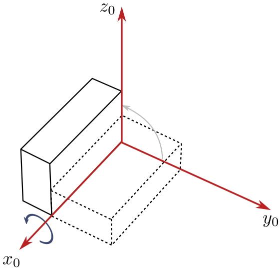
$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}\mathbf{R}'.$$

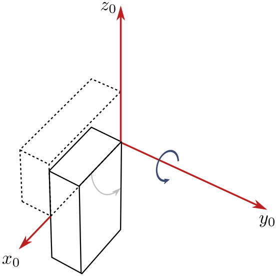
- Результирующий поворот:

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{C}\mathbf{R}, \quad \boxed{\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}}$$

Матрицы последовательных поворотов записываются в исходном базисе и перемножаются в обратном порядке.

Активная точка зрения





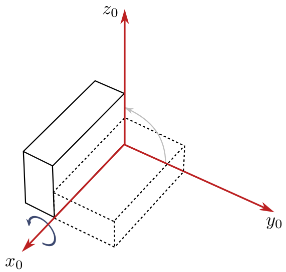
- Поворот вокруг оси x_0 на угол $\varphi_1 = \pi/2$:

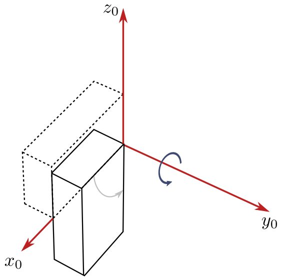
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Поворот вокруг оси y_0 на угол $\varphi_2 = \pi/2$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Активная точка зрения





- Итоговое преобразование:

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Координаты вектора $\mathbf{R}$, связанного с телом:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{CR} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

Пассивная точка зрения

https://rutube.ru/video/f1aed8a306a739a7c4294a124b496ff4/?r=wd

https://youtu.be/6ZLvkHcinMM

Пассивная точка зрения

- Первое преобразование

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}^T\mathbf{R}$$

- Первое преобразование

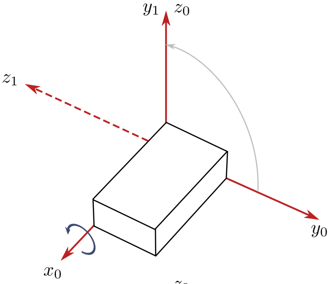
$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}^T\mathbf{R}'$$

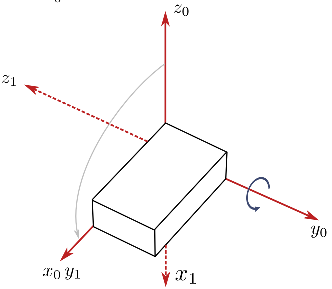
- Результирующее преобразование

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{R} = \mathbf{C}^T\mathbf{R}, \quad \boxed{\mathbf{C} = \mathbf{AB}}$$

Матрицы последовательных поворотов записываются в поворачиваемых базисах и перемножаются в прямом порядке

Пассивная точка зрения





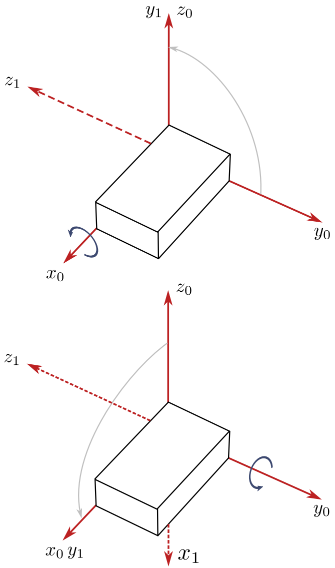
- Поворот вокруг оси x_1 (x_0) на угол $\varphi_1 = \pi/2$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Поворот вокруг оси z_1 на угол $\varphi_2 = -\pi/2$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Пассивная точка зрения



- Итоговое преобразование:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Координаты вектора $\mathbf{R}$, связанного с телом, в новом базисе

$$\mathbf{R}' = \mathbf{C}^T\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

Активная и пассивная точки зрения

Активная точка зрения

Матрица поворота и координаты повёрнутого вектора:

$$\boldsymbol{A}_{31} = \boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{A}_1$$

$$\boldsymbol{R}^{(3)} = \boldsymbol{A}_{31} \boldsymbol{R}^{(1)}$$

Матрицы элементарных поворотов записываются в 1-ом (исходном) базисе.

Пассивная точка зрения

Матрица поворота и координаты вектора в новом базисе:

$$\boldsymbol{A}_{31} = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{A}_3$$

$$\boldsymbol{R}^{(3)} = \boldsymbol{A}_{31}^T \boldsymbol{R}^{(1)}$$

Матрицы элементарных поворотов записываются в поворачиваемых базисах.

Список использованных источников

1. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Издательство физико-математической литературы, 2001.
2. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980.