

# Кинематические уравнения

## Динамика твёрдого тела и систем тел

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики

13 октября 2025 г.



**САМАРСКИЙ** УНИВЕРСИТЕТ  
SAMARA UNIVERSITY

## Угловая скорость

# Угловая скорость

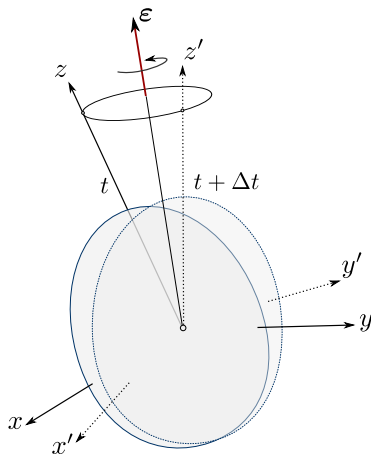
Плоское движение:

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z(t) \rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \int_0^t \frac{M_z(t)}{J_z} dt \rightarrow \varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 t + \int_0^t \int_0^t \frac{M_z(t)}{J_z} dt$$

Пространственное движение:

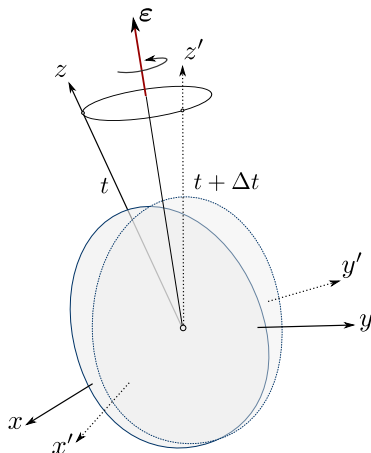
$$\begin{cases} J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z = M_x(t), \\ J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x = M_y(t), \\ J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y = M_z(t). \end{cases} \quad \dot{\omega}_{x,y,z} \rightarrow \int \rightarrow \omega_{x,y,z} \rightarrow \int \rightarrow ?$$

# Угловая скорость [1]



В соответствии с теоремой Эйлера положение тела в момент  $t + \Delta t$  может быть получено из начального положения поворотом вокруг оси  $\epsilon(t + \Delta t)$  на угол  $\Delta\varphi(t + \Delta t)$ :

# Угловая скорость [1]



В соответствии с теоремой Эйлера положение тела в момент  $t + \Delta t$  может быть получено из начального положения поворотом вокруг оси  $\epsilon(t + \Delta t)$  на угол  $\Delta\varphi(t + \Delta t)$ :

■ вектор бесконечно малого поворота:

$$\Delta\varphi = \epsilon(t + \Delta t)\Delta\varphi(t + \Delta t)$$

■ мгновенная угловая скорость:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(t + \Delta t)}{\Delta t} \epsilon(t + \Delta t)$$

## Кватернион бесконечно малого поворота [2]

В момент времени  $t$  положение твёрдого тела определяется кватернионом:

$$\Lambda(t) = \cos \frac{\varphi(t)}{2} + \mathbf{e}(t) \sin \frac{\varphi(t)}{2}. \quad (1)$$

В момент времени  $t + \Delta t$ :

$$\Lambda(t + \Delta t) = \cos \frac{\varphi(t + \Delta t)}{2} + \mathbf{e}(t + \Delta t) \sin \frac{\varphi(t + \Delta t)}{2}. \quad (2)$$

Кватернион малого поворота:

$$\Delta \Lambda = \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \boldsymbol{\varepsilon} \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx 1 + \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta \varphi}{2} \quad (3)$$

# Бесконечно малый поворот

Поворот вектора  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r}' = \Delta\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{r} \circ \Delta\bar{\mathbf{\Lambda}} = \left(1 + \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \circ \mathbf{r} \circ \left(1 - \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{2}\right). \quad (4)$$

Раскрывая скобки в (4):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{2} \circ \mathbf{r} - \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{2} - \boldsymbol{\varepsilon} \circ \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi^2}{4}. \quad (5)$$

Для малого  $\Delta\varphi$ :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{2} \circ \mathbf{r} - \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (6)$$

# Формула Эйлера

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{2} \circ \mathbf{r} - \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Приращение вектора  $\mathbf{r}$ :

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{2} \circ \mathbf{r} - \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{2} - \mathbf{r} = (\boldsymbol{\varepsilon} \Delta\varphi) \times \mathbf{r} \quad (7)$$

Скорость изменения вектора  $\mathbf{r}$ :

$$\dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right) \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8)$$

# Формула Эйлера

Векторная формула:

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (9)$$

Матричная формула:

$$\dot{\mathbf{r}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r} \quad (10)$$

где  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  – матрица угловой скорости:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

## **Кинематические уравнения**

Угловую скорость тела выражают через производные параметров, задающих его угловое положение:

- кватернионы:

$$\boldsymbol{\omega} = f(\boldsymbol{\Lambda}, \dot{\boldsymbol{\Lambda}});$$

- углы Эйлера, Брайнта, ... :

$$\boldsymbol{\omega} = f(\psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi});$$

- ортогональные матрицы:

$$\boldsymbol{\omega} = f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}, \dot{a}_{11}, \dot{a}_{12}, \dots, \dot{a}_{33}).$$

# Производная кватерниона

## Активная точка зрения

Используя закон сложения поворотов

$$\Lambda(t + \Delta t) = \Delta \Lambda(t) \circ \Lambda(t) = \left(1 + \varepsilon \frac{\Delta \varphi}{2}\right) \circ \Lambda(t). \quad (12)$$

Производная кватерниона

$$\dot{\Lambda} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega \circ \Lambda(t) \quad (13)$$

Угловая скорость

$$\omega = 2 \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} \quad (14)$$

Вектор  $\omega$  и кватернион  $\Lambda(t)$  заданы в неподвижном базисе.

# Производная кватерниона

## Пассивная точка зрения

Для пассивной точки зрения

$$\Lambda(t + \Delta t) = \Lambda(t) \circ \Delta\Lambda = \Lambda(t) \circ \left(1 + \varepsilon \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad (15)$$

Производная кватерниона

$$\dot{\Lambda} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \Lambda(t) \circ \omega \quad (16)$$

Угловая скорость

$$\omega = 2\bar{\Lambda} \circ \dot{\Lambda} \quad (17)$$

Вектор  $\omega$  и кватернион  $\Lambda(t)$  заданы базисе, связанном с телом.

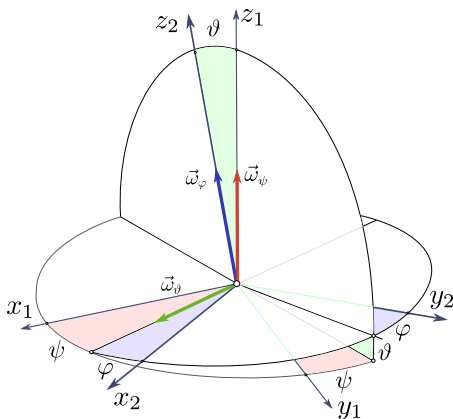
Координатная форма уравнения (17)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Обратное преобразование

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^T \\ \boldsymbol{\omega} & -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

# Углы Эйлера

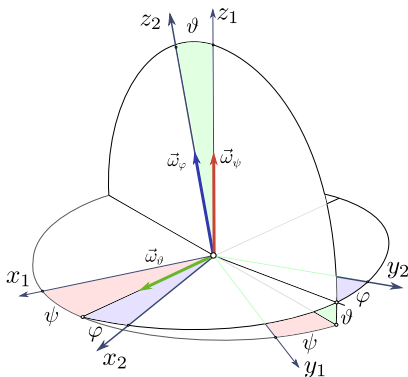


Найдем угловую скорость тела, вращающегося вокруг неподвижной точки по известным законам изменения углов Эйлера:

$$\psi = f_1(t), \quad \vartheta = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

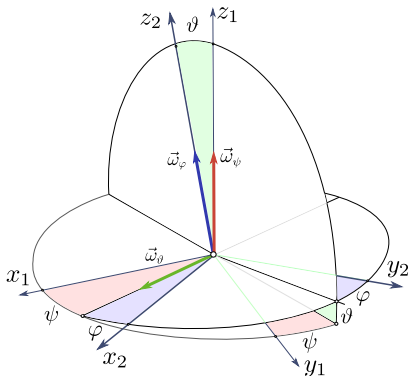
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}_3^1 + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_1' + \dot{\varphi} \mathbf{e}_3^2.$$

# Проекции подвижные оси



Орты	$\mathbf{e}_1^2$	$\mathbf{e}_2^2$	$\mathbf{e}_3^2$
$\mathbf{e}_3^1$	$\sin \vartheta \sin \varphi$	$\sin \vartheta \cos \varphi$	$\cos \vartheta$
$\mathbf{e}_1^1$	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
$\mathbf{e}_3^2$	0	0	1

# Проекции на неподвижные оси



Орты	$\mathbf{e}_1^1$	$\mathbf{e}_2^1$	$\mathbf{e}_3^1$
$\mathbf{e}_3^1$	0	0	1
$\mathbf{e}_1^2$	$\cos \psi$	$-\sin \psi$	0
$\mathbf{e}_3^2$	$\sin \vartheta \sin \psi$	$-\sin \vartheta \cos \psi$	$\cos \vartheta$

# Кинематические уравнения Эйлера

## В проекциях на подвижные оси

Зная проекции осей элементарных вращений на оси подвижной системы координат, получим выражения для проекций угловой скорости тела на подвижные оси:

$$\begin{cases} \omega_{x_2} = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ \omega_{y_2} = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ \omega_{z_2} = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (20)$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \omega_{x_2} + \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} \omega_{y_2}, \\ \dot{\vartheta} = \omega_{x_2} \cos \varphi - \omega_{y_2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = -\omega_{x_2} \sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta - \omega_{y_2} \cos \varphi \operatorname{ctg} \vartheta + \omega_{z_2}. \end{cases} \quad (21)$$

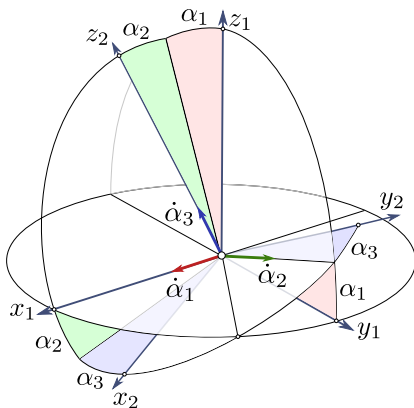
# Кинематические уравнения Эйлера

## В проекциях на неподвижные оси

Проекции угловой скорости на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{cases} \omega_{x_1} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta, \sin \psi, \\ \omega_{y_1} &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta, \cos \psi, \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{cases} \quad (22)$$

# Углы Брайнта



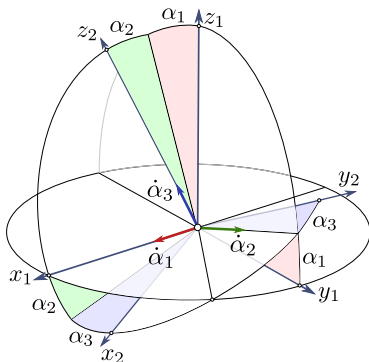
Найдём угловую скорость тела, вращающегося вокруг неподвижной точки по известным законам изменения углов Брайнта:

$$\alpha_1 = f_1(t), \alpha_2 = f_2(t), \alpha_3 = f_3(t).$$

Угловую скорость вращения тела представим в виде суммы трех вращений, соответствующих изменению углов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ :

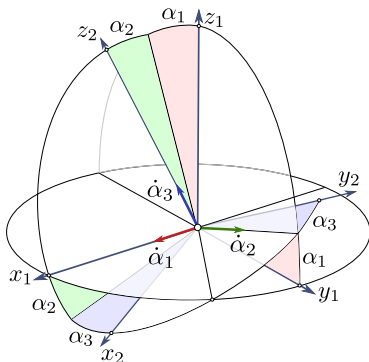
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}_1 \mathbf{e}_1^1 + \dot{\alpha}_2 \mathbf{e}_2' + \dot{\alpha}_3 \mathbf{e}_3^2. \quad (23)$$

# Проекции на подвижные оси



Орты	$\mathbf{e}_1^2$	$\mathbf{e}_2^2$	$\mathbf{e}_3^2$
$\mathbf{e}_1^1$	$\cos \alpha_2 \cos \alpha_3$	$-\cos \alpha_2 \sin \alpha_3$	$\sin \alpha_2$
$\mathbf{e}_2^1$	$\sin \alpha_3$	$\cos \alpha_3$	0
$\mathbf{e}_3^1$	0	0	1

# Проекции на неподвижные оси



Орты	$\mathbf{e}_1^1$	$\mathbf{e}_2^1$	$\mathbf{e}_3^1$
$\mathbf{e}_1^1$	1	0	0
$\mathbf{e}_2^1$	0	$\cos \alpha_1$	$\sin \alpha_1$
$\mathbf{e}_3^1$	$\sin \alpha_2$	$-\cos \alpha_2 \sin \alpha_1$	$\cos \alpha_2 \cos \alpha_1$

# Кинематические уравнения для углов Брайнта

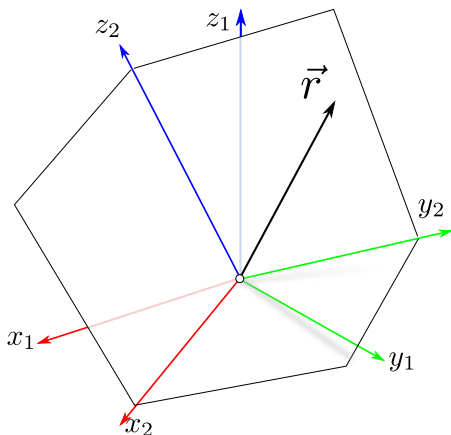
Проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат будут иметь вид:

$$\begin{cases} \omega_{x_2} = \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_3, \\ \omega_{y_2} = -\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 + \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_3, \\ \omega_{z_2} = \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_3 \end{cases} \quad (24)$$

Решая эту систему относительно  $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3$ , получим кинематические дифференциальные уравнения для углов Брайнта:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_2} \omega_{x_2} - \frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_2} \omega_{y_2}, \\ \dot{\alpha}_2 = \sin \alpha_3 \omega_{x_2} + \cos \alpha_3 \omega_{y_2}, \\ \dot{\alpha}_3 = -\cos \alpha_3 \tan \alpha_2 \omega_{x_2} + \sin \alpha_3 \tan \alpha_2 \omega_{y_2} + \omega_{z_2}. \end{cases} \quad (25)$$

# Направляющие косинусы



- Пусть система координат  $Ox_2y_2z_2$ , жестко связанная с твердым телом, вращается относительно неподвижной системы координат  $Ox_1y_1z_1$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ .
- С системой координат  $Ox_2y_2z_2$  жестко связан неизменный вектор  $\vec{r}$ .
- Координатный столбец вектора  $\vec{r}$  в неподвижном базисе  $\mathbf{r}^{(1)}$  и координатный столбец этого вектора в подвижном базисе  $\mathbf{r}^{(2)}$  связаны соотношением:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}^{12} \mathbf{r}^{(2)}. \quad (26)$$

## Производная вектора [3]

Продифференцировав (26):

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}^{12} \mathbf{r}^{(2)},$$

получим:

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \dot{\mathbf{A}}^{12} \mathbf{r}^{(2)}. \quad (27)$$

Абсолютная производная вектора  $\vec{r}$ , жестко связанного с подвижным базисом, определяется соотношением:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (28)$$

в матричной координатной форме (в неподвижном базисе):

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \mathbf{A}^{(12)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)} \mathbf{r}^{(2)}. \quad (29)$$

# Матрица угловой скорости

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \mathbf{A}^{(12)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)} \mathbf{r}^{(2)}.$$

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}$  – кососимметричная матрица проекций угловых скоростей на оси координат:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{z_2} & \omega_{y_2} \\ \omega_{z_2} & 0 & -\omega_{x_2} \\ -\omega_{y_2} & \omega_{x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

# Производные от направляющих косинусов

Сравнивая

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \mathbf{A}^{(12)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)} \mathbf{r}^{(2)}. \quad (30)$$

и

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \dot{\mathbf{A}}^{12} \mathbf{r}^{(2)}, \quad (31)$$

получим дифференциальные уравнения для направляющих косинусов в матричной форме.

Для матрицы преобразования координат из базиса 2 в базис 1:

$$\boxed{\dot{\mathbf{A}}^{12} = \mathbf{A}^{12} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}} \quad (32)$$

Для матрицы преобразования координат из базиса 1 в базис 2:

$$\boxed{\dot{\mathbf{A}}^{21} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)} \mathbf{A}^{21}} \quad (33)$$

# Список использованных источников



Журавлев, В. Ф. Основы теоретической механики. М: Издательство физико-математической литературы. 2001.



Бранец, В. Н., Шмыглевский, И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва: Наука. 1973.



Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир. 1980.