

# Случай Эйлера

## Динамика твёрдого тела и систем тел

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики

24 ноября 2025 г.



САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
SAMARA UNIVERSITY

# **Уравнения движения**

# Решения уравнений движения твёрдого тела

Динамические уравнения движения тела вокруг центра масс:

$$\begin{cases} J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z = M_x, \\ J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x = M_y, \\ J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y = M_z. \end{cases} \quad (1)$$

Для уравнений (1) найдены аналитические решения только для нескольких частных случаев [1]:

- Случай Эйлера;
- Случай Лагранжа;
- Случай Ковалевской;
- Случай Горячева-Чаплыгина;
- Случай Гесса.

# Случай Эйлера

Главный момент внешних сил равен нулю.

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0; \quad (2)$$

скалярная форма уравнений:

$$\begin{cases} J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z = 0, \\ J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x = 0, \\ J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y = 0. \end{cases} \quad (3)$$

# Первые интегралы

# Первые интегралы

Интеграл энергии:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 \Rightarrow$$

$(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 = 2T = \text{const}$

(4)

Интеграл кинетического момента:

$$\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0 \Rightarrow \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 \Rightarrow$$

$(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 = L^2 = \text{const}$

(5)

# Скалярная форма первых интегралов

- Интеграл энергии:

$$J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 = 2T \quad (6)$$

- Интеграл кинетического момента:

$$J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 \omega_y^2 + J_z^2 \omega_z^2 = L^2 = 2DT \quad (7)$$

Выражения (6) и (7) определяют в главной центральной системе координат тела два эллипсоида.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H^2$$

**Полодии**

# Полодии [2]

$$J_z < J_y < J_x$$

$z_2$

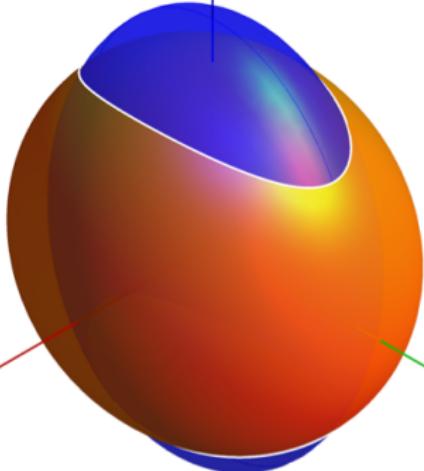


Diagram illustrating the intersection of two ellipsoids: an orange ellipsoid of energy and a blue ellipsoid of inertia. A vertical axis  $z_2$  passes through their intersection. A horizontal coordinate system  $(x_2, y_2)$  is shown at the base.

$J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 = 2T$   
 $J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 \omega_y^2 + J_z^2 \omega_z^2 = 2DT = L^2$

Линии пересечения эллипсоида энергии и эллипсоида инерции определяют **полодии** – геометрическое место вектора угловой скорости.

# Пределы изменения величины D ( $J_z < J_y < J_x$ )

Умножим **интеграл энергии** (6) на  $J_x$  и вычтем из **интеграла кинетического момента** (7):

$$J_x(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) - J_x^2\omega_x^2 - J_y^2\omega_y^2 - J_z^2\omega_z^2 = 2J_xT - 2DT \quad (8)$$

$$J_y(J_x - J_y)\omega_y^2 + J_z(J_x - J_z)\omega_z^2 = 2T(J_x - D) \quad (9)$$

Умножим **интеграл энергии** (6) на  $J_z$  и вычтем из **интеграла кинетического момента** (7):

$$J_z(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) - J_x^2\omega_x^2 - J_y^2\omega_y^2 - J_z^2\omega_z^2 = 2J_xT - 2DT \quad (10)$$

$$J_x(J_x - J_z)\omega_x^2 + J_y(J_y - J_z)\omega_y^2 = 2T(D - J_z) \quad (11)$$

Левая часть (11) и (9) всегда больше нуля, поэтому

$$J_z \leq D \leq J_x, \quad (J_z < J_y < J_x)$$

(12)

# Уравнения полодий

- Умножая интеграл энергии на  $J_x, J_z, J_y$  и вычитая результат из интеграла кинетического момента, получим три уравнения полодий для трех плоскостей:

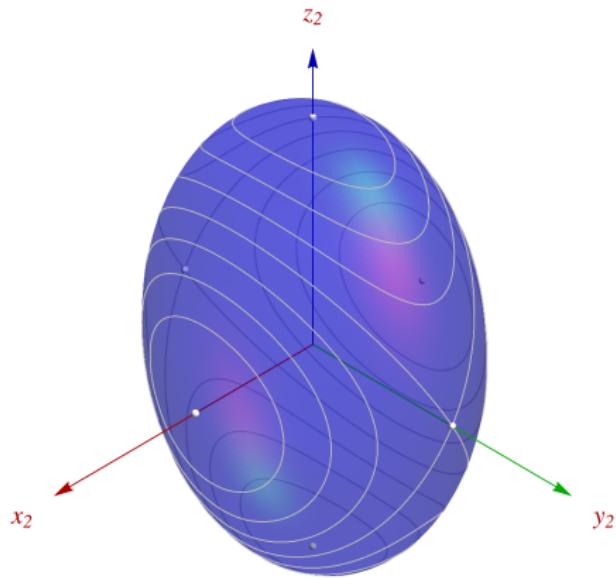
$$yz : \quad J_y(J_x - J_y)\omega_y^2 + J_z(J_x - J_z)\omega_z^2 = 2T(J_x - D) \quad (13)$$

$$xy : \quad J_x(J_x - J_z)\omega_x^2 + J_y(J_y - J_z)\omega_y^2 = 2T(D - J_z) \quad (14)$$

$$xz : \quad J_x(J_x - J_y)\omega_x^2 - J_z(J_y - J_z)\omega_z^2 = 2T(D - J_y) \quad (15)$$

- Уравнения (14) и (13) – уравнение эллипсов.
- Уравнение (15) – уравнение гипербол.

# Полодии



Значениям

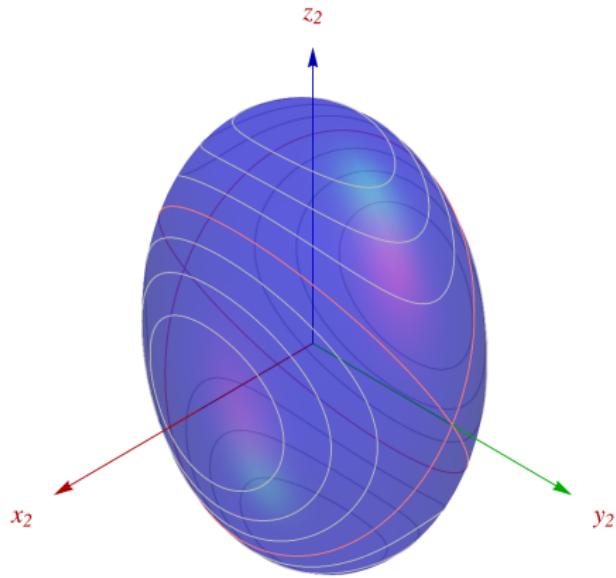
$$D = J_x,$$

$$D = J_y,$$

$$D = J_z$$

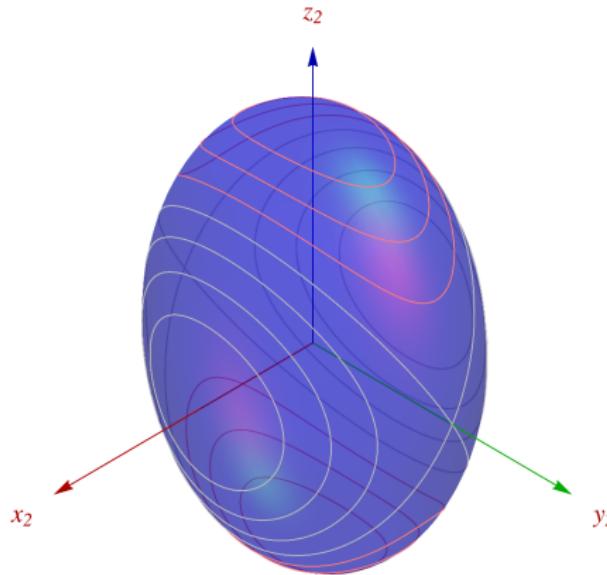
соответствуют оси перманентного вращения, совпадающие с главными осями инерции  $x_2, y_2$  и  $z_2$  соответственно.

# Полодии

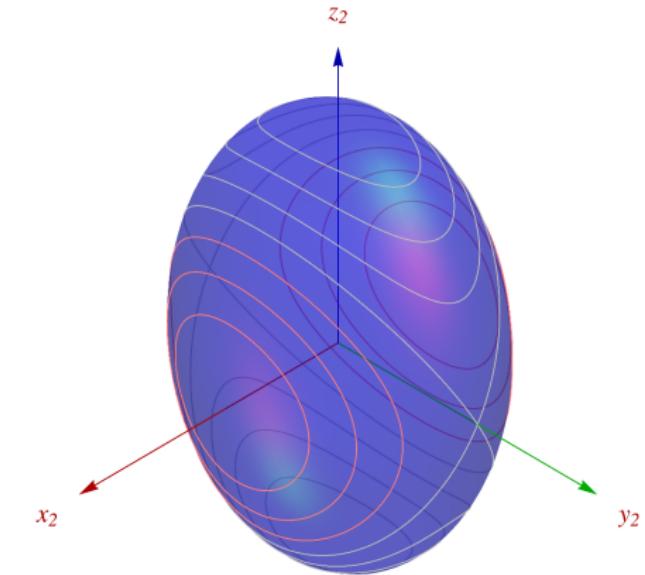


Значению  $D = J_y$  отвечают две особые полодии – *сепаратрисы*, разделяющие другие полодии на четыре области.

# Полодии



Полодии, охватывающие ось  $z_2$   
( $D < J_y$ ).



Полодии, охватывающие ось  $x_2$   
( $D > J_y$ ).

# Полодии



# Геометрическая интерпретация Пуансо

# Геометрическая интерпретация

Проекция вектора угловой скорости тела на направление кинетического момента постоянна:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 2T = \text{const.} \quad (16)$$

Любое приращение вектора угловой скорости перпендикулярно вектору L:

$$\mathbf{L} \cdot \Delta \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) определяет в инерциальном пространстве неизменную плоскость. Расстояние от центра эллипсоида энергии до плоскости –  $2T/L$

# Геометрическая интерпретация

Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки можно представить как качение эллипсоида энергии тела по неизменяемой плоскости, при этом геометрический центр эллипсоида энергии закреплен на расстоянии  $2T/L$  выше этой плоскости [2].

# Геометрическая интерпретация



YouTube



RuTube

## **Устойчивость вращений вокруг главных осей**

# Вращение вокруг оси $x_2$ ( $J_z < J_y < J_x$ )

- Рассмотрим твёрдое тело, вращающееся вокруг главной оси с максимальным моментом инерции –  $x_2$ , с угловой скоростью  $\omega_0$ .
- Пусть проекции угловой скорости получили *малые* возмущения:

$$\omega_x = \omega_0 + \delta_x, \quad \omega_y = 0 + \delta_y, \quad \omega_z = 0 + \delta_z.$$

- Уравнения движения

$$\begin{cases} J_x \dot{\delta}_x - (J_y - J_z) \delta_y \delta_z = 0, \\ J_y \dot{\delta}_y - (J_z - J_x) \delta_z (\omega_0 + \delta_x) = 0, \\ J_z \dot{\delta}_z - (J_x - J_y) \delta_y (\omega_0 + \delta_x) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

- $\delta_* \delta_* \rightarrow 0$ .

## Вращение вокруг оси $x_2$ ( $J_z < J_y < J_x$ )

Пренебрегая малыми второго порядка, получим:

$$\begin{cases} J_x \dot{\delta}_x = 0, \\ J_y \dot{\delta}_y - (J_z - J_x) \delta_z \omega_0 = 0, \\ J_z \dot{\delta}_z - (J_x - J_y) \delta_y \omega_0 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

- Из 1-го уравнения следует:  $\delta_x = \text{const.}$
- Из 2-го и 3-го уравнений следует:

$$J_y \ddot{\delta}_y - \omega_0^2 \frac{(J_z - J_x)(J_x - J_y)}{J_z} \delta_y = 0.$$

$$J_z \ddot{\delta}_z - \omega_0^2 \frac{(J_z - J_x)(J_x - J_y)}{J_y} \delta_z = 0.$$

## Вращение вокруг оси $x_2$ ( $J_z < J_y < J_x$ )

$$\ddot{\delta}_y + \omega_0^2 \frac{(J_x - J_z)(J_x - J_y)}{J_y J_z} \delta_y = 0. \quad (20)$$

$$\ddot{\delta}_z + \omega_0^2 \frac{(J_x - J_z)(J_x - J_y)}{J_y J_z} \delta_z = 0. \quad (21)$$

Вид решений линейных уравнений (20) и (21) зависит от знака множителя при  $\delta_y$  и  $\delta_z$ . При  $J_z < J_y < J_x$ :

$$\omega_0^2 \frac{(J_x - J_z)(J_x - J_y)}{J_y J_z} > 0,$$

следовательно решения (20) и (21) имеют вид:

$$\delta_y = a_y \sin(\lambda t + \varepsilon_y), \quad \delta_z = a_z \sin(\lambda t + \varepsilon_z)$$

*Вращение вокруг оси  $x_2$  устойчиво.*

## Вращение вокруг оси $z_2$ ( $J_z < J_y < J_x$ )

Для вращения вокруг оси с минимальным моментом инерции:

$$\ddot{\delta}_x + \omega_0^2 \frac{(J_y - J_z)(J_x - J_z)}{J_x J_y} \delta_x = 0. \quad (22)$$

$$\ddot{\delta}_y + \omega_0^2 \frac{(J_y - J_z)(J_x - J_z)}{J_x J_y} \delta_y = 0. \quad (23)$$

При  $J_z < J_y < J_x$ :

$$\omega_0^2 \frac{(J_x - J_z)(J_x - J_y)}{J_y J_z} > 0,$$

следовательно решения (22) и (23) имеют вид:

$$\delta_x = a_x \sin(\lambda t + \varepsilon_x), \quad \delta_y = a_y \sin(\lambda t + \varepsilon_y)$$

*Вращение вокруг оси  $z_2$  устойчиво.*

# Вращение вокруг оси $y_2$ ( $J_z < J_y < J_x$ )

- Рассмотрим твёрдое тело, вращающееся вокруг главной оси со средним моментом инерции –  $y_2$ , с угловой скоростью  $\omega_0$ .
- Пусть проекции угловой скорости получили *малые* возмущения:

$$\omega_x = 0 + \delta_x, \quad \omega_y = \omega_0 + \delta_y, \quad \omega_z = 0 + \delta_z.$$

- Уравнения движения

$$\begin{cases} J_x \dot{\delta}_x - (J_y - J_z)(\omega_0 + \delta_y)\delta_z = 0, \\ J_y \dot{\delta}_y - (J_z - J_x)\delta_z \delta_x = 0, \\ J_z \dot{\delta}_z - (J_x - J_y)\delta_x(\omega_0 + \delta_y) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

- $\delta_* \delta_* \rightarrow 0$ .

# Вращение вокруг оси $y_2$ ( $J_z < J_y < J_x$ )

Пренебрегая малыми второго порядка, получим:

$$\begin{cases} J_x \dot{\delta}_x - (J_z - J_x) \delta_z \omega_0 = 0, \\ J_y \dot{\delta}_y = 0, \\ J_z \dot{\delta}_z - (J_x - J_y) \delta_x \omega_0 = 0. \end{cases} \quad (25)$$

- Из 2-го уравнения следует:  $\delta_y = \text{const.}$
- Из 1-го и 3-го уравнений следует:

$$\ddot{\delta}_x + \omega_0^2 \frac{(J_z - J_y)(J_x - J_y)}{J_x J_z} \delta_x = 0.$$

$$\ddot{\delta}_z + \omega_0^2 \frac{(J_z - J_y)(J_x - J_y)}{J_x J_z} \delta_z = 0.$$

## Вращение вокруг оси $y_2$ ( $J_z < J_y < J_x$ )

$$\ddot{\delta}_x + \omega_0^2 \frac{(J_z - J_y)(J_x - J_y)}{J_x J_z} \delta_x = 0. \quad (26)$$

$$\ddot{\delta}_z + \omega_0^2 \frac{(J_z - J_y)(J_x - J_y)}{J_x J_z} \delta_z = 0. \quad (27)$$

При  $J_z < J_y < J_x$ :

$$\omega_0^2 \frac{(J_z - J_y)(J_x - J_y)}{J_x J_z} < 0,$$

следовательно решения (26) и (27) имеют вид:

$$\delta_x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}, \quad \delta_y = C_3 e^{\lambda t} + C_4 e^{-\lambda t}$$

*Вращение вокруг оси  $y_2$  неустойчиво.*

# Интегрирование уравнений движения

# Эллиптический интеграл

- Неполный эллиптический интеграл Лежандра первого рода:

$$F(\varphi, m) = u = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}, \quad 0 \leq m \leq 1; \quad (28)$$

- в форме Якоби:

$$F(x, m) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}}. \quad (29)$$

- Полный эллиптический интеграл Лежандра первого рода:

$$K(m) = F(\pi/2, m) = u = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}, \quad 0 \leq m \leq 1; \quad (30)$$

- в форме Якоби:

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}}. \quad (31)$$

# Эллиптические функции

Для интеграла

$$F(\varphi, m) = u = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}, \quad 0 \leq m \leq 1$$

определенны следующие эллиптические функции Якоби:

- синус-амплитуды

$$\operatorname{sn} u = \sin \varphi \tag{32}$$

- косинус-амплитуды

$$\operatorname{cn} u = \cos \varphi \tag{33}$$

- дельта-амплитуды

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - m \cos^2 \varphi} \tag{34}$$

# Определение угловых скорости $\omega_x, \omega_z$

Из уравнений

$$yz : J_y(J_x - J_y)\omega_y^2 + J_z(J_x - J_z)\omega_z^2 = 2T(J_x - D), \quad (35)$$

$$xy : J_x(J_x - J_z)\omega_x^2 + J_y(J_y - J_z)\omega_y^2 = 2T(D - J_z) \quad (36)$$

получим выражения для угловых скоростей  $\omega_x, \omega_z$

$$\omega_x^2 = \frac{J_y(J_y - J_z)}{J_x(J_x - J_z)}(a^2 - \omega_y^2), \quad (37)$$

$$\omega_z^2 = \frac{J_y(J_x - J_y)}{J_z(J_x - J_z)}(b^2 - \omega_y^2), \quad (38)$$

где

$$a^2 = \frac{2T(D - J_z)}{J_y(J_y - J_z)}, \quad b^2 = \frac{2T(J_x - D)}{J_y(J_x - J_y)}. \quad (39)$$

# Случай $D < J_y$ , $a^2 < b^2$

После подстановки

$$\omega_x^2 = \frac{J_y(J_y - J_z)}{J_x(J_x - J_z)}(a^2 - \omega_y^2) \text{ и } \omega_z^2 = \frac{J_y(J_x - J_y)}{J_z(J_x - J_z)}(b^2 - \omega_y^2),$$

в

$$J_y \dot{\omega}_y = (J_z - J_x)\omega_z \omega_x$$

получим:

$$\int \frac{d\omega_y}{\sqrt{(a^2 - \omega_y^2)(b^2 - \omega_y^2)}} = \pm(t - t_0) \sqrt{\frac{(J_x - J_y)(J_y - J_z)}{J_x J_z}} \quad (40)$$

# Случай $D < J_y$ , $a^2 < b^2$

$$\int \frac{d\omega_y/a}{\sqrt{(1-\omega_y^2/a^2)(1-\omega_y^2/b^2)}} = \pm b(t-t_0) \sqrt{\frac{(J_x - J_y)(J_y - J_z)}{J_x J_z}} \quad (41)$$

После замен

$$x = \frac{\omega_y}{a}, \quad k = \frac{a}{b}, \quad \tau = (t - t_0) \sqrt{\frac{2T(J_x - D)(J_y - J_z)}{J_x J_y J_z}}$$

уравнение (41) принимает вид:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \pm \tau \quad (42)$$

# Случай $D < J_y$ , $a^2 < b^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \pm \tau \quad (43)$$

Решение (43) в эллиптических функциях Якоби:

$$x = \pm \operatorname{sn} \tau \quad \rightarrow \quad \omega_y = \pm \sqrt{\frac{2T(D - J_z)}{J_y(J_y - J_z)}} \operatorname{sn} \tau \quad (44)$$

# Случай $D < J_y$ , $a^2 < b^2$

Подставляя (44) в

$$\omega_x^2 = \frac{J_y(J_y - J_z)}{J_x(J_x - J_z)}(a^2 - \omega_y^2) \text{ и } \omega_z^2 = \frac{J_y(J_x - J_y)}{J_z(J_x - J_z)}(b^2 - \omega_y^2),$$

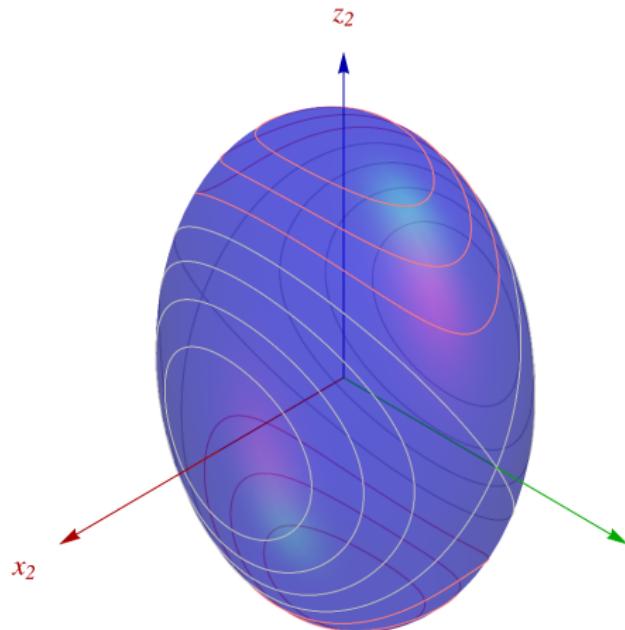
с учётом тождеств

$$\operatorname{sn}^2 \tau + \operatorname{cn}^2 \tau = 1, \quad \operatorname{dn}^2 \tau + k^2 \operatorname{sn}^2 \tau = 1,$$

решения для проекций  $\omega_x, \omega_z$  будут иметь вид:

$$\omega_x = \pm \sqrt{\frac{2T(D - J_z)}{J_x(J_x - J_z)}} \operatorname{cn} \tau, \quad \omega_z = \pm \sqrt{\frac{2T(D_x - D)}{J_z(J_x - J_z)}} \operatorname{dn} \tau. \quad (45)$$

# Случай $D < J_y$ , $a^2 < b^2$



$$\omega_x = \pm \sqrt{\frac{2T(D - J_z)}{J_x(J_x - J_z)}} \operatorname{cn} \tau, \quad (46)$$

$$\omega_y = \pm \sqrt{\frac{2T(D - J_z)}{J_y(J_y - J_z)}} \operatorname{sn} \tau, \quad (47)$$

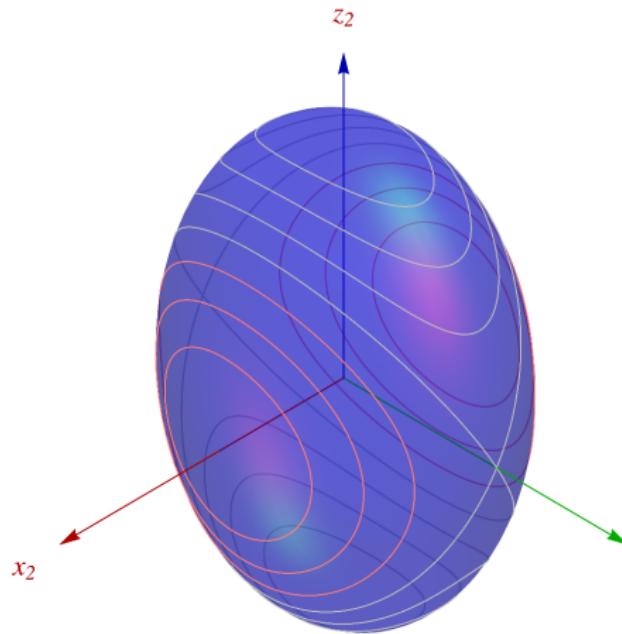
$$\omega_z = \pm \sqrt{\frac{2T(J_x - D)}{J_z(J_x - J_z)}} \operatorname{dn} \tau. \quad (48)$$

где

$$k = \frac{a}{b},$$

$$\tau = (t - t_0) \sqrt{\frac{2T(J_x - D)(J_y - J_z)}{J_x J_y J_z}}$$

# Случай $D > J_y$ , $a^2 > b^2$



$$\omega_x = \pm \sqrt{\frac{2T(D - J_z)}{J_x(J_x - J_z)}} \operatorname{cn} \tau, \quad (49)$$

$$\omega_y = \pm \sqrt{\frac{2T(J_x - D)}{J_y(J_x - J_y)}} \operatorname{sn} \tau, \quad (50)$$

$$\omega_z = \pm \sqrt{\frac{2T(J_x - D)}{J_z(J_x - J_z)}} \operatorname{dn} \tau. \quad (51)$$

где:

$$k = \frac{b}{a},$$

$$\tau = (t - t_0) \sqrt{\frac{2T(J_x - J_y)(D - J_z)}{J_x J_y J_z}}.$$

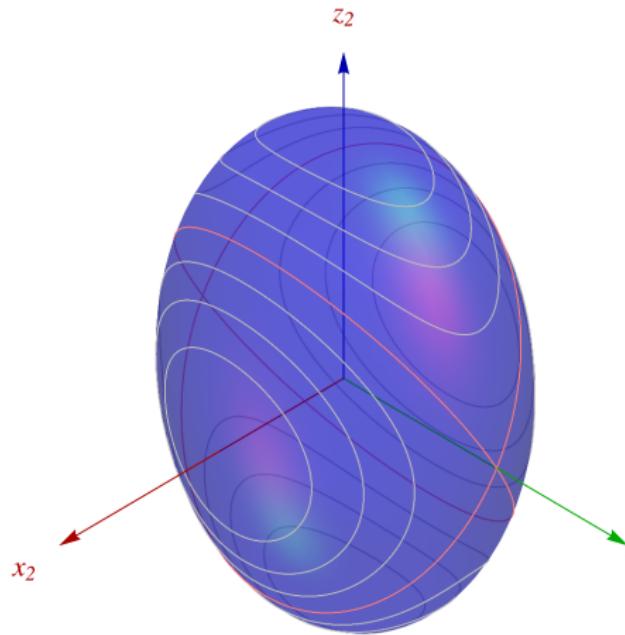
# Случай $D = J_y$ , $a = b$

Если  $a = b$ , то  $k = 1$  и эллиптический интеграл упрощается

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}} = \pm \tau \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \pm \tau \quad (52)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \pm \tau \quad \rightarrow \quad x = \pm \operatorname{th} \tau \quad \rightarrow \quad \omega_y = \pm \sqrt{\frac{2T}{J_y}} \operatorname{th} \tau \quad (53)$$

# Случай $D = J_y$ , $a = b$



$$\omega_x = \pm \sqrt{\frac{2T(J_y - J_z)}{J_x(J_x - J_z)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}, \quad (54)$$

$$\omega_y = \pm \sqrt{\frac{2T}{J_y}} \operatorname{th} \tau, \quad (55)$$

$$\omega_z = \pm \sqrt{\frac{2T(J_x - J_y)}{J_z(J_x - J_z)}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}. \quad (56)$$

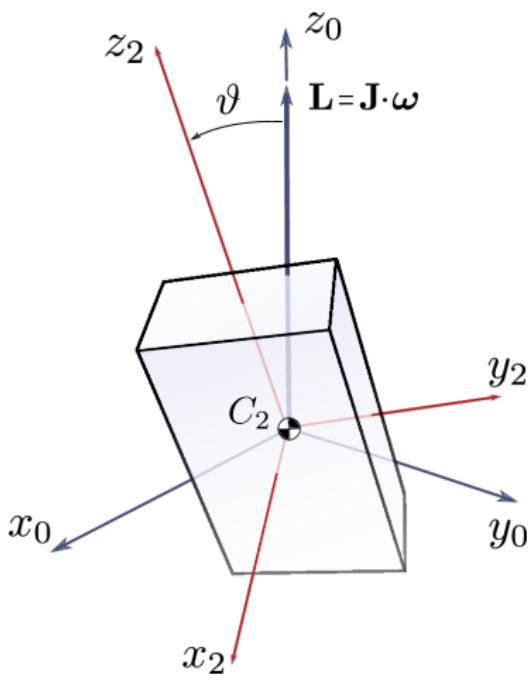
где:

$$\operatorname{ch} \tau = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2},$$

$$\operatorname{th} \tau = \frac{e^{2\tau} - 1}{e^{2\tau} + 1}.$$

# Интегрирование кинематических уравнений

# Кинематические уравнения ( $D < J_y$ )



Проекции вектора кинетического момента  $L$  на оси связанный системы координат:

$$\begin{cases} L_x = L \sin \vartheta \sin \varphi, \\ L_y = L \sin \vartheta \cos \varphi, \\ L_z = L \cos \vartheta. \end{cases} \quad (57)$$

Выражения для проекций вектора  $L$  в главных осях инерции:

$$\begin{cases} L_x = J_x \omega_x, \\ L_y = J_y \omega_y, \\ L_z = J_z \omega_z. \end{cases} \quad (58)$$

# Кинематические уравнения

$$\begin{cases} J_x \omega_x = L \sin \vartheta \sin \varphi, \\ J_y \omega_y = L \sin \vartheta \cos \varphi, \\ J_z \omega_z = L \cos \vartheta. \end{cases} \quad (59)$$

Угол нутации:

$$\cos \vartheta = \frac{J_z \omega_z}{L}$$

(60)

Угол собственного вращения:

$$\tan \varphi = \frac{J_x \omega_x}{J_y \omega_y}$$

(61)

# Определение угла прецессии

Из кинематического уравнения

$$\dot{\omega}_z = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \quad (62)$$

выражается производная угла прецессии

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_z - \dot{\varphi}}{\cos \vartheta} = \frac{L}{J_z} \left( 1 - \frac{\dot{\varphi}}{\omega_z} \right). \quad (63)$$

Выражение для  $\vartheta$ , входящее в (63):

$$\cos \vartheta = \frac{J_z}{L} \omega_z = \pm \frac{J_z}{L} \sqrt{\frac{2T(J_x - D)}{J_z(J_x - J_z)}} \operatorname{dn} \tau = \pm \sqrt{\frac{J_z(J_x - D)}{D(J_x - J_z)}} \operatorname{dn} \tau \quad (64)$$

# Определение угла прецессии

Для определения  $\dot{\varphi}$  продифференцируем

$$\tan \varphi = \pm \sqrt{\frac{J_x(J_y - J_z)}{J_y(J_x - J_z)}} \frac{\operatorname{cn} \tau}{\operatorname{sn} \tau} \quad (65)$$

$$\dot{\varphi} = \pm \cos^2 \varphi \sqrt{\frac{J_x(J_y - J_z)}{J_y(J_x - J_z)}} \frac{\operatorname{dn} \tau}{\operatorname{sn}^2 \tau} \frac{d\tau}{dt} \quad (66)$$

Замены в (66)

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi^2}, \quad \operatorname{dn} \tau = \pm \sqrt{\frac{J_z(J_x - J_z)}{2T(J_x - D)}} \omega_z,$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{2T(J_x - D)(J_y - J_z)}{J_x J_y J_z}}.$$

# Определение угла прецессии

Выражение для  $\dot{\varphi}$  после замен

$$\dot{\varphi} = \omega_z \left( \frac{J_y}{J_y - J_z} \operatorname{sn}^2 \tau + \frac{J_x}{J_x - J_z} \operatorname{cn}^2 \tau \right)^{-1} \quad (67)$$

Подставляя (67) и выражение для  $\cos \vartheta$  (64)

$$\cos \vartheta = \frac{J_z}{L} \omega_z = \pm \frac{J_z}{L} \sqrt{\frac{2T(J_x - D)}{J_z(J_x - J_z)}} \operatorname{dn} \tau = \pm \sqrt{\frac{J_z(J_x - D)}{D(J_x - J_z)}} \operatorname{dn} \tau$$

в (63)

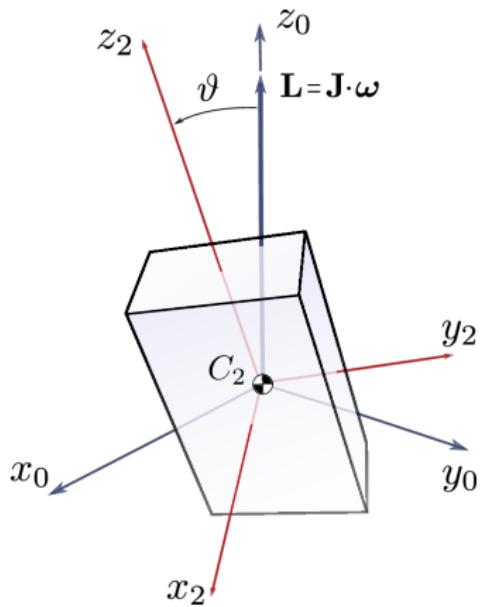
$$\dot{\psi} = \frac{\omega_z - \dot{\varphi}}{\cos \vartheta} = \frac{L}{J_z} \left( 1 - \frac{\dot{\varphi}}{\omega_z} \right),$$

получим:

$$\dot{\psi} = \omega_z \frac{L}{J_z} \frac{J_z \operatorname{sn}^2 \tau / (J_y - J_z) + J_z \operatorname{cn}^2 \tau / (J_x - J_z)}{J_y \operatorname{sn}^2 \tau / (J_y - J_z) + J_x \operatorname{cn}^2 \tau / (J_x - J_z)}$$

(68)

# Углы Эйлера ( $D < J_y$ )



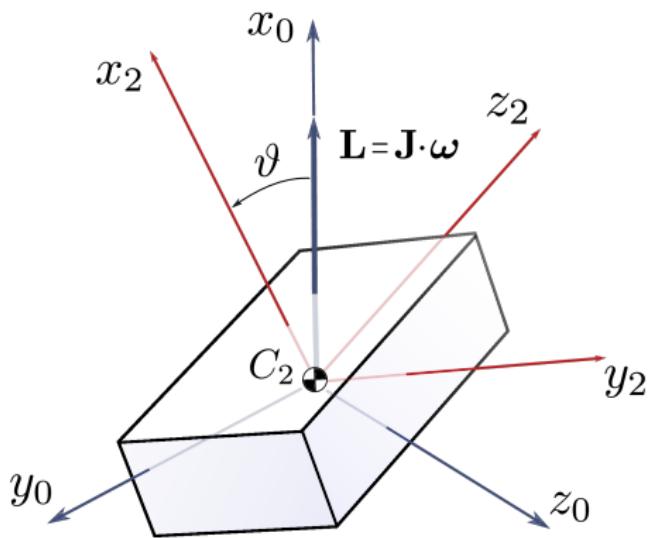
$$\cos \vartheta = \pm \sqrt{\frac{J_z(J_x - D)}{D(J_x - J_z)}} \operatorname{dn} \tau$$

$$\tan \varphi = \pm \sqrt{\frac{J_x(J_y - J_z)}{J_y(J_x - J_z)}} \frac{\operatorname{cn} \tau}{\operatorname{sn} \tau}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L}{J_z} \frac{J_z \operatorname{sn}^2 \tau / (J_y - J_z) + J_z \operatorname{cn}^2 \tau / (J_x - J_z)}{J_y \operatorname{sn}^2 \tau / (J_y - J_z) + J_x \operatorname{cn}^2 \tau / (J_x - J_z)}$$

Знак  $\dot{\varphi}$  совпадает со знаком  $\omega_z$ .  $\dot{\psi} > 0$ .

# Система координат ( $D > J_y$ )



# Углы Эйлера ( $D > J_y$ )

$$\cos \vartheta = \pm \sqrt{\frac{J_x(D - J_z)}{D(J_x - J_z)}} \operatorname{dn} \tau, \quad (69)$$

$$\tan \varphi = \pm \sqrt{\frac{J_y(J_x - J_z)}{J_z(J_x - J_y)}} \frac{\operatorname{sn} \tau}{\operatorname{cn} \tau}, \quad (70)$$

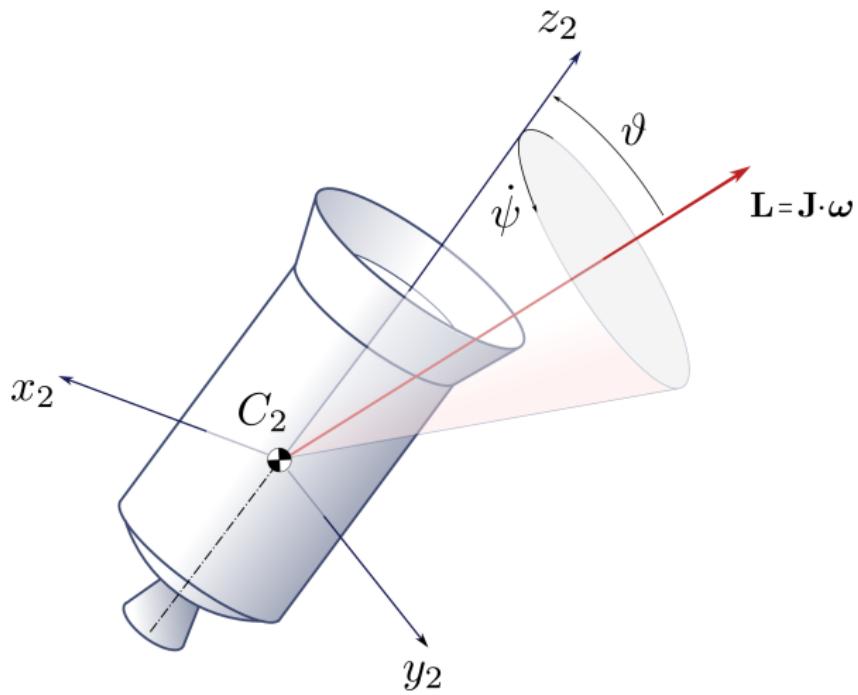
$$\dot{\varphi} = -\omega_x \left( \frac{J_y}{J_x - J_y} \operatorname{sn}^2 \tau + \frac{J_z}{J_x - J_z} \operatorname{cn}^2 \tau \right)^{-1}, \quad (71)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L}{J_x} \frac{J_x \operatorname{sn}^2 \tau / (J_x - J_y) + J_x \operatorname{cn}^2 \tau / (J_x - J_z)}{J_y \operatorname{sn}^2 \tau / (J_x - J_y) + J_z \operatorname{cn}^2 \tau / (J_x - J_z)}. \quad (72)$$

Знак  $\dot{\varphi}$  противоположен знаку  $\omega_z$ .  $\dot{\psi} > 0$ .

# Регулярная прецессия

## Движение осесимметричного твёрдого тела



## Угловые скорости

Система уравнений движения осесимметричного твёрдого тела ( $J_x = J_y$ ):

$$\begin{cases} J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z = 0, \\ J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x = 0, \\ J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z = 0, \\ J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x = 0, \\ J_z \dot{\omega}_z = 0. \end{cases} \quad (73)$$

Из 3-го уравнения системы (73) следует

$$\boxed{\omega_z = \omega_{z0} = \text{const}} \quad (74)$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x - \frac{(J_x - J_z)}{J_x} \omega_y \omega_z = \dot{\omega}_x - \nu \omega_y = 0, \\ \dot{\omega}_y + \frac{(J_z - J_x)}{J_y} \omega_z \omega_x = \dot{\omega}_x + \nu \omega_x = 0, \end{cases} \quad \nu = \frac{\omega_{z0}(J_x - J_z)}{J_x}$$

# Угловые скорости

Решение системы

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x - \nu \omega_y = 0, \\ \dot{\omega}_y + \nu \omega_x = 0, \end{cases} \quad \nu = \frac{w_{z0}(J_x - J_z)}{J_x} \quad (75)$$

имеет вид:

$$\omega_x = \omega_{x0} \cos \nu(t - t_0) + \omega_{y0} \sin \nu(t - t_0), \quad (76)$$

$$\omega_y = \omega_{y0} \cos \nu(t - t_0) - \omega_{x0} \sin \nu(t - t_0). \quad (77)$$

Первый интеграл системы (75)

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \Omega^2 = \text{const} \quad (78)$$

## Определение углов Эйлера [3]

Сравнивая выражения для проекций вектора кинетического момента  $\mathbf{L}$  на оси главного центрального базиса:

$$\begin{cases} L_x = L \sin \vartheta_0 \sin \varphi, \\ L_y = L \sin \vartheta_0 \cos \varphi, \\ L_z = L \cos \vartheta_0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} L_x = J_x \omega_x, \\ L_y = J_x \omega_y, \\ L_z = J_z \omega_z. \end{cases} \quad (79)$$

$$L \cos \vartheta_0 = J_z \omega_z \rightarrow \boxed{\cos \vartheta_0 = \cos \theta_0 = \frac{J_z \omega_{z0}}{L}} \quad (80)$$

Угол нутации при движении осесимметричного твёрдого тела по инерции остаётся постоянным.

# Определение угла $\psi$

Подставляя выражение для  $\omega_y$  из кинематических уравнений

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \vartheta_0 \sin \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \vartheta_0 \cos \varphi, \\ \omega_z = \omega_{z0} = \dot{\psi} \cos \vartheta_0 + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (81)$$

в уравнение

$$L \sin \vartheta_0 \cos \varphi = J_x \omega_y,$$

получим

$$\dot{\psi} = \frac{L}{J_x} = \text{const} = n \quad (82)$$

$$\psi = \psi_0 + nt \quad (83)$$

# Определение угла $\varphi$

Из уравнения

$$\omega_z = \omega_{z0} = \dot{\psi} \cos \vartheta_0 + \dot{\varphi},$$

с учётом

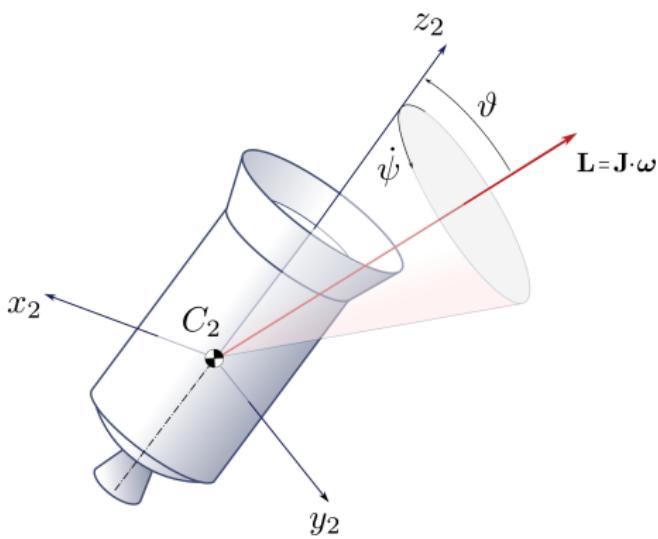
$$\dot{\psi} = \frac{L}{J_x} = \text{const} = n,$$

следует

$$\dot{\varphi} = \omega_{z0} - n \cos \vartheta_0 \quad (84)$$

$$\varphi = n_1 t + \varphi_0, \quad n_1 = \omega_{z0} - n \cos \vartheta_0 \quad (85)$$

# Регулярная прецессия



Углы Эйлера:

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta_0 = \frac{J_z \omega_{z0}}{L} = \text{const},$$

$$\psi = \psi_0 + nt,$$

$$\varphi = \varphi_0 + n_1 t.$$

где:

$$n = \frac{L}{J_x},$$

$$n_1 = \omega_{z0} - n \cos \vartheta_0.$$

# Список использованных источников

-  Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. – Ижевск : НИЦ <<Регулярная и хаотическая динамика>>, 2001.
-  Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. – М. : Мир, 1980.
-  Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: Динамика системы материальных точек. – Изд-во Наука, 1966.