Системы твердых тел

Матричные уравнения связей

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики

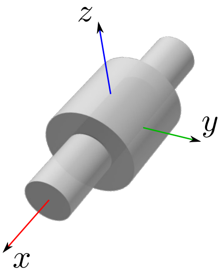
27 февраля 2025 г.

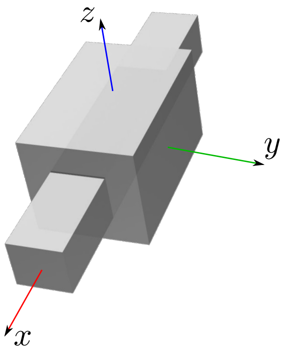
САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

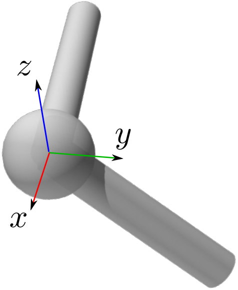
Содержание

Шарниры

Шарнир, соединяющий два смежных тела, может ограничивать их относительное поступательное и вращательное движение. В общем случае в шарнире возникают произвольно направленные векторы реакции и момента.

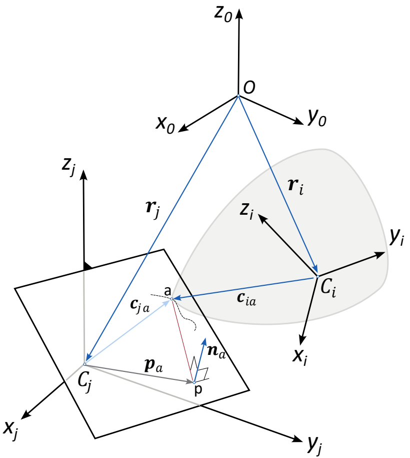






Связь ”Точка-плоскость”

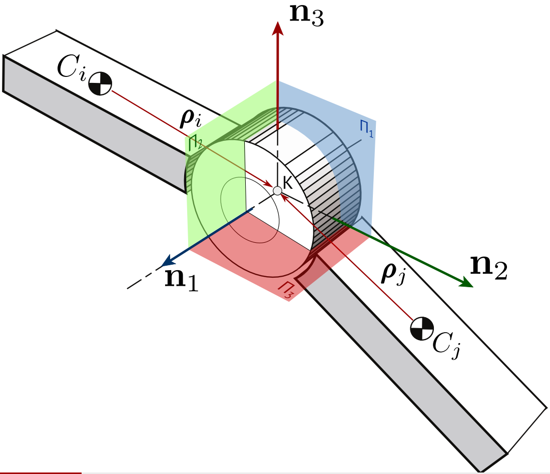
Точка-плоскость



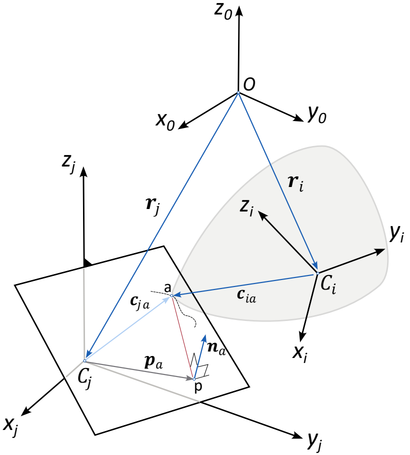
- Определим уравнения элементарной связи «точка-плоскость», которая ограничивает относительное поступательное движение двух тел таким образом, что определенная точка одного тела вынуждена находиться на плоскости, жестко связанной с другим телом.
- Это уравнение связи приводит к возникновению в точке контакта силы реакции перпендикулярной плоскости, в которой разрешено движение заданной точки тела.

Шарниры

Задав несколько связей «точка-плоскость», возможно определение связи «точка-прямая» (минус 2 степени свободы) и «точка-точка» (минус 3 степени свободы).

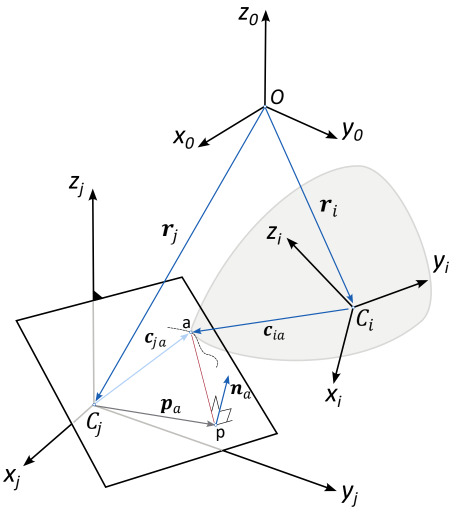


Точка-плоскость



- Точка «а», связанная с телом i, скользит по плоскости, связанной с телом j.
- Положение точки «а» относительно центра масс тела i определяется неизменным (в системе координат $C_i x_i y_i z_i$) шарнирным вектором $\mathbf{c}_{ia}$
- Плоскость, связанная с телом j определяется единичным вектором нормали $\mathbf{n}_a$ и положением некоторой точки плоскости $\mathbf{p}_a$.

Уравнение связи



Точка «а» принадлежит плоскости если выполняется условие:

$$(\mathbf{r}_i + \mathbf{c}_{ia} - \mathbf{r}_j - \mathbf{p}_a) \cdot \mathbf{n}_a = 0 \qquad (1)$$

Выражение в скобках – вектор $\overrightarrow{pa}$, лежащий в плоскости, связанной с телом j.

Уравнение связи

Векторная запись:

$$(\mathbf{r}_i + \mathbf{c}_{ia} - \mathbf{r}_j - \mathbf{p}_a) \cdot \mathbf{n}_a = 0 \tag{2}$$

Матричная координатная запись:

$$(\mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)} - \mathbf{A}_j \mathbf{p}_a^{(j)})^T \mathbf{A}_j^T \mathbf{n}_a^{(j)} = 0 \tag{3}$$

или

$$(\mathbf{A}_j \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)}) - (\mathbf{n}_a^{(j)})^T \mathbf{p}_a^{(j)} = 0 \tag{4}$$

Последнее слагаемое – это расстояние от начала системы координат C_j до плоскости, которое не изменяется.

Уравнение связи

$$(\mathbf{A}_j \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)}) - (\mathbf{n}_a^{(j)})^T \mathbf{p}_a^{(j)} = 0 \qquad (5)$$

Производная уравнения связи:

$$(\mathbf{A}_j \tilde{\omega}_j^{(j)} \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)}) + (\mathbf{A}_j \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{V}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{V}_j^{(0)}) \qquad (6)$$

Производные матриц поворота:

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i, \quad \dot{\mathbf{A}}_j = \mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j, \quad \dot{\mathbf{A}}_j^T = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \mathbf{A}_j^T$$

Уравнение связи

Производная уравнения связи:

$$(\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)})^T(\mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i\mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)}) + (\mathbf{A}_j\mathbf{n}_a^{(j)})^T(\mathbf{V}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i\tilde{\omega}_i^{(i)}\mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{V}_j^{(0)}) \quad (7)$$

Координатный столбец радиус-вектора точки контакта относительно центра масс тела j в "нулевой" системе координат:

$$\mathbf{c}_{ja}^{(0)} = \mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i\mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)} \quad (8)$$

Производная этого вектора:

$$\frac{d\mathbf{c}_{ja}^{(0)}}{dt} = \mathbf{V}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i\tilde{\omega}_i^{(i)}\mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{V}_j^{(0)} \quad (9)$$

Уравнение связи для скоростей (после первого дифференцирования):

$$(\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)})^T\mathbf{c}_{ja}^{(0)} + (\mathbf{A}_j\mathbf{n}_a^{(j)})^T\frac{d\mathbf{c}_{ja}^{(0)}}{dt} = 0 \quad (10)$$

Уравнение связи

$$(\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)})^T\mathbf{c}_{ja}^{(0)} + (\mathbf{A}_j\mathbf{n}_a^{(j)})^T\frac{d\mathbf{c}_{ja}^{(0)}}{dt} = 0 \tag{11}$$

Вторая производная:

$$2(\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)})^T\frac{d\mathbf{c}_{ja}^{(0)}}{dt} + (\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)} + \mathbf{A}_j\tilde{\epsilon}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)})^T\mathbf{c}_{ja}^{(0)} + \\ + (\mathbf{A}_j\mathbf{n}_a^{(j)})^T(\mathbf{a}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i\tilde{\omega}_i^{(i)}\tilde{\omega}_i^{(i)}\mathbf{c}_{ia}^{(i)} + \mathbf{A}_i\tilde{\epsilon}_i^{(i)}\mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{a}_j^{(0)}) = 0 \tag{12}$$

Блочная матричная запись:

$$\begin{bmatrix}[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T & -[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i^{(0)} \\ \mathbf{a}_j^{(0)}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\mathbf{A}_i\tilde{\mathbf{c}}_{ia}^{(i)} & [\mathbf{c}_{ja}^{(0)}]^T\mathbf{A}_j\tilde{\mathbf{n}}_a^{(j)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_i^{(i)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_j^{(j)}\end{bmatrix} = \\ = -2(\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)})^T\frac{d\mathbf{c}_{ja}^{(0)}}{dt} - [\mathbf{c}_{ja}^{(0)}]^T\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)} - [\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\mathbf{A}_i\tilde{\omega}_i^{(i)}\tilde{\omega}_i^{(i)}\mathbf{c}_{ia}^{(i)} \tag{13}$$

Уравнение связи

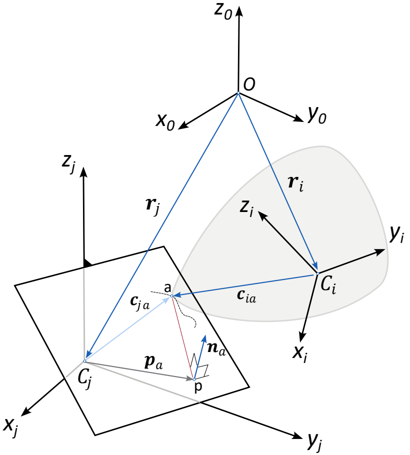
$$\begin{bmatrix}[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T & -[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i^{(0)}\\ \mathbf{a}_j^{(0)}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\mathbf{A}_i\tilde{\mathbf{c}}_{ia}^{(i)} & [\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}]^T\mathbf{A}_j\tilde{\mathbf{n}}_a^{(j)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_i^{(i)}\\ \boldsymbol{\epsilon}_j^{(j)}\end{bmatrix} =$$

$$= -2(\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)})^T\frac{d\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}}{dt} - [\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}]^T\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)} - [\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\mathbf{A}_i\tilde{\omega}_i^{(i)}\tilde{\omega}_i^{(i)}\mathbf{c}_{ia}^{(i)}$$

$$\begin{bmatrix}[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T & -[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\mathbf{A}_i\tilde{\mathbf{c}}_{ia}^{(i)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i^{(0)}\\ \boldsymbol{\epsilon}_i^{(i)}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T & -[\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}]^T\mathbf{A}_j\tilde{\mathbf{n}}_a^{(j)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_j^{(0)}\\ \boldsymbol{\epsilon}_j^{(j)}\end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_{ij}^{(0)}$$

$$\mathbf{Q}_i\ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j\ddot{\mathbf{X}}_j = \boldsymbol{b}_{ij}^{(0)}$$

Сила и момент реакции



Сила реакции:

$$\mathbf{R}_i^{(0)} = \mathbf{n}_a^{(0)}\lambda = -\mathbf{R}_j^{(0)}$$

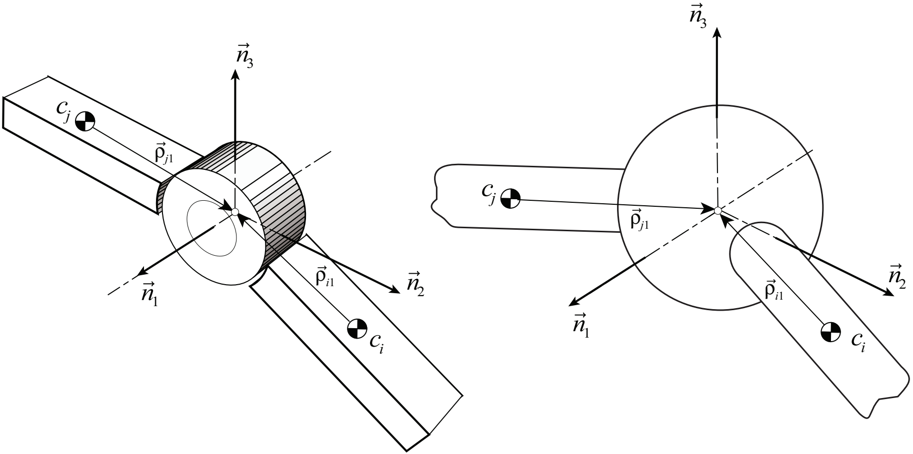
Момент от силы реакции:

$$\mathbf{M}_i^{(i)}(\mathbf{R}_i) = \tilde{\mathbf{c}}_{ia}^{(i)}\mathbf{A}_i^T\mathbf{n}_a^{(0)}\lambda$$

$$\mathbf{M}_j^{(j)}(\mathbf{R}_i) = \tilde{\mathbf{c}}_{ja}^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)}\lambda$$

Связь, ограничивающая относительное вращение

Ограничение относительного вращения



Ограничение относительного вращения

Угловое ускорение тела j относительно тела i в проекции на направление $\vec{n}_{ij}$ должно быть равно нулю:

$$\left(\varepsilon_{ji}^{(i)}\right)^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0.$$

Относительное ускорение определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{ji}^{(i)} = \dot{\omega}_{ij}^{(i)} = \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} - \omega_i^{(i)}.$$

Подставив последнее выражение в уравнение связи, получим

$$\left(\mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \varepsilon_j^{(j)} - \left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \varepsilon_i^{(i)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0. \qquad (14)$$

Ограничение относительного вращения

$$\left(\mathbf{A}^j\mathbf{A}^{iT}\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T\varepsilon_j^{(j)} - \left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T\varepsilon_i^{(i)} - \tilde{\omega}_i^{(i)}\mathbf{A}^i\mathbf{A}^{jT}\omega_j^{(j)}\mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) можно привести к виду

$$\mathbf{Q}_i\ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j\ddot{\mathbf{X}}_j = b_{ij}, \tag{16}$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \left(\mathbf{A}^j\mathbf{A}^{iT}\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \end{pmatrix},\ \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \end{pmatrix}, \tag{17}$$

скалярный член b_{ij} определяется так:

$$b_{ij} = \tilde{\omega}_i^{(i)}\mathbf{A}^i\mathbf{A}^{jT}\omega_j^{(j)}\mathbf{n}_{ij}^{(i)}.$$

Момент реакции

При существовании связи, ограничивающей относительное вращение двух тел, на тела действует реактивный момент. На тело i действует момент

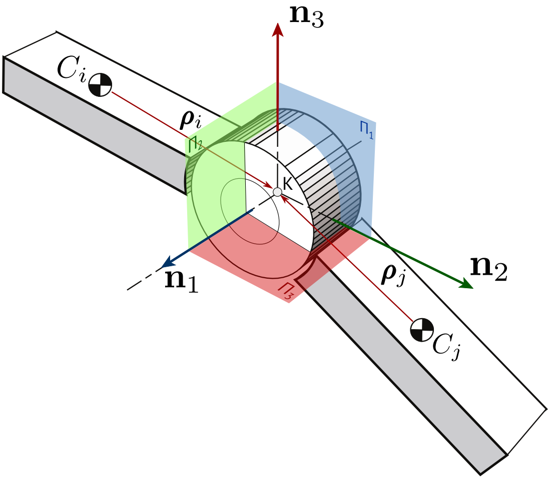
$$\mathbf{L}_i = -\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\lambda, \tag{18}$$

на тело j

$$\mathbf{L}_j = \mathbf{A}^{jT}\mathbf{A}^{i}\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\lambda. \tag{19}$$

Пример

Цилиндрический шарнир



Цилиндрический шарнир

$$
\begin{bmatrix}
\mathbf{M}_1 & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{Q}_{11}^T & \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{13}^T & \mathbf{Q}_{14}^T & \mathbf{Q}_{15}^T \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{Q}_{21}^T & \mathbf{Q}_{22}^T & \mathbf{Q}_{23}^T & \mathbf{Q}_{24}^T & \mathbf{Q}_{25}^T \\
\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{Q}_{13} & \mathbf{Q}_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{Q}_{14} & \mathbf{Q}_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{Q}_{15} & \mathbf{Q}_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\ddot{\mathbf{X}}_1 \\ \ddot{\mathbf{X}}_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{b}_5
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^{(0)} \\ \mathbf{T}_i^{(i)} - \boldsymbol{\omega}_i^{(i)} \times \boldsymbol{J}_i^{(i)} \boldsymbol{\omega}_i^{(i)} \end{bmatrix}, \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \boldsymbol{J}_i^{(i)} \end{bmatrix}
$$