Раскрытие посадочной опоры

Прикладные задачи динамики твердого тела и систем тел

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики
Самарский университет

2 октября 2025 г.

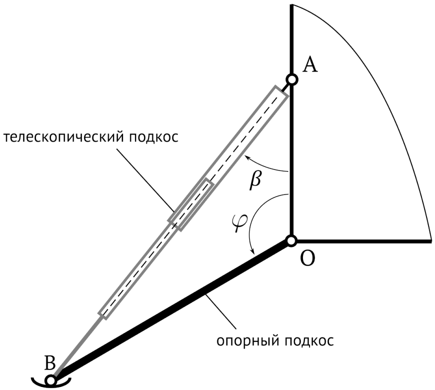
САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Посадочные опоры РН Falcon-9

Условия

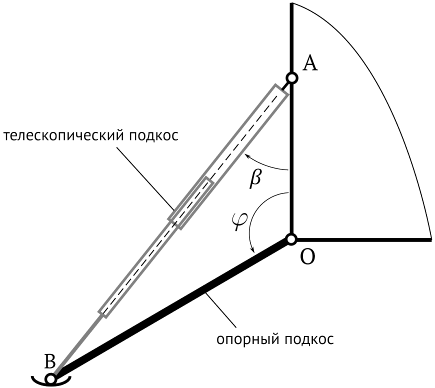
- Опоры раскрываются до касания поверхности земли в процессе работы двигателя торможения.
- Движение посадочной опоры при раскрытии рассматривается по отношению к корпусу возвращаемой ступени, т.е. по отношению к неинерциальной системе координат, движущейся с известным ускорением под действием силы тяги двигателя и силы тяжести.

Схема



- Посадочную опору представим в виде двух стержней, которые назовем опорный подкос и демпфирующий подкос.
- Опорный подкос имеет постоянную длину $OB = l$.
- Демпфирующий подкос представляет собой телескопическую конструкцию и его длина $AB = s$ при раскрытии опоры увеличивается.

Уравнение движения



- Для записи уравнений относительного движения посадочной опоры используем формализм Лагранжа.
- Рассматриваемый механизм имеет одну степень свободы и его положение однозначно определяется углом поворота опорного подкоса относительно корпуса возвращаемой ступени φ.

Уравнение движения

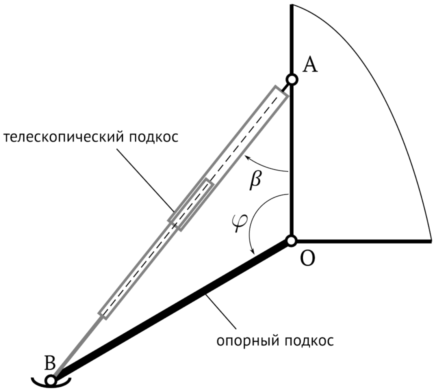
- Уравнение Лагранжа второго рода имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}$$

- Кинетическая энергия относительного движения системы представляет собой кинетическую энергию движения посадочной опоры относительно корпуса. Эта кинетическая энергия будет складываться из кинетических энергий двух звеньев AB и OB:

$$T = T_{AB} + T_{OB}$$

Масса стержня AB



- Подкос OB представлен однородным стержнем с массой m
- Демпфирующий подкос AB представлен однородным стержнем переменной длины s(t) и массой

$$m_{AB} = \frac{m_{AB}}{m} = km,$$

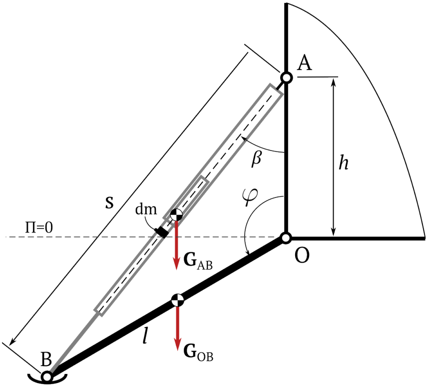
где k – отношение массы подкоса AB к массе подкоса OB.

Кинетическая энергия стержня АВ

- Для определения кинетической энергии подкоса переменной длины рассмотрим его бесконечно-малый элемент, который имеет массу dm_{AB}.
- Элементарную массу dm_{AB} можно представить как произведение погонной массы стержня μ_{AB}, которая будет изменяться при изменении s, на бесконечно-малый участок длины $dm_{AB} = \mu_{AB} ds$.
- Погонную массу стержня μ_{AB} определим как отношению его полной массы m_{AB} к текущей длине s:

$$dm_{AB} = \mu_{AB} ds = k\frac{m}{s} ds.$$

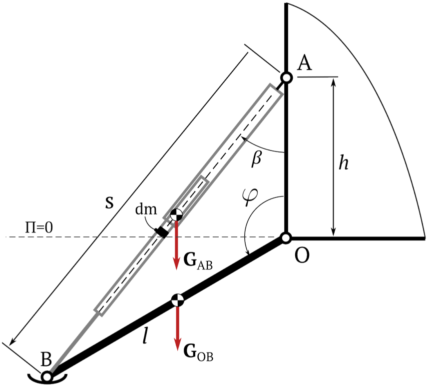
Скорости точек стержня AB



Элементарная масса dm_{AB} совершает сложное движение:

- поворачивается, вместе со стержнем вокруг оси A – трансверсальная скорость v_τ.
- движется вдоль стержня вследствие изменения его длины – радиальная скорость v_r.

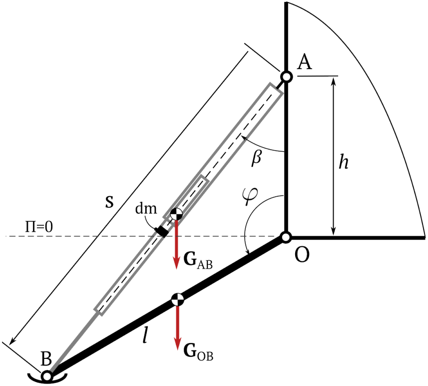
Скорости точек стержня AB



- Предположим, что радиальные скорости точек стержня увеличиваются от точки A к точке B линейно от нуля (скорость точки A), до $V_B = \dot{s}$.
- Скорость точки, находящейся на расстоянии ξ от точки A, будет равна

$$v_r = \frac{\xi}{s}\dot{s}$$

Скорости точек стержня AB



- Касательная скорость точки также зависит от расстояния до оси вращения A и от угловой скорости вращения стержня AB:

$$v_\tau = \xi \dot{\beta}$$

где β – угол поворота стержня AB относительно корпуса.

- Полная скорость массы dm_{AB} определяется выражением:

$$v_{dm} = \sqrt{v_\tau^2 + v_r^2} = \sqrt{\frac{2}{s^2}\dot{s}^2 + {}^2\dot{\beta}^2}$$

Кинетическая энергия стержня AB

Кинетическая энергия демпфирующего подкоса:

$$T_{AB} = \int_0^s \frac{v_{dm}^2}{2} \frac{km}{s} = \frac{1}{2} \int_0^s (\xi^2 \dot{\beta}^2 + \frac{\xi^2}{s^2} \dot{s}^2) \frac{km}{s} d\xi = \frac{1}{6} (s^2 \dot{\beta}^2 + \dot{s}^2) m_{AB}.$$

Угол поворота стержня AB β будет определяться выражением:

$$\cos\beta = \frac{h^2 + s^2 - l^2}{2sh}$$

а длина s выражением

$$s^2 = l^2 + h^2 - 2lh\cos\varphi$$

Кинетическая энергия стержня AB

Представим расстояние между шарнирами h как

$$h = \zeta l,$$

где ζ некоторая безразмерная величина $0 < \zeta < 1$.
С учетом этой замены, выражение для угла β и длины s примут вид:

$$\cos\beta = \frac{\zeta - \cos\varphi}{\eta}, \quad s = \eta l$$

где $\eta^2 = 1 + \zeta^2 - 2\zeta\cos\varphi$

Кинетическая энергия стержня AB

Продифференцировав выражения

$$\cos\beta = \frac{\zeta - \cos\varphi}{\eta}, \quad s = \eta l$$

получим угловую скорость демпфирующего подкоса и скорость его удлинения

$$\dot{\beta} = \frac{\zeta\cos\varphi - 1}{\eta^2}\dot{\varphi}, \quad \dot{s} = l\frac{\zeta}{\eta}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Кинетическая энергия стержня AB

Кинетическая энергия посадочной опоры примет вид:

$$T = \frac{1}{6}(s^2\dot{\beta}^2 + \dot{s}^2)m + \frac{J_{OB}\dot{\varphi}^2}{2}$$

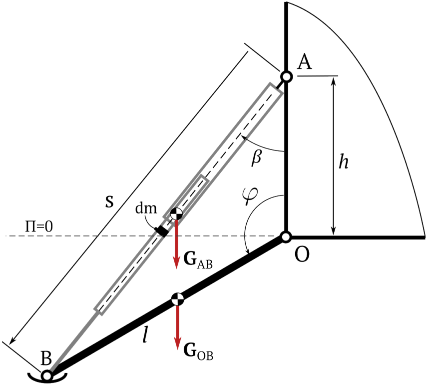
С учётом выражений для $\dot{\beta}$ и $\dot{s}$, получим:

$$T = \frac{1}{6}m_{AB}l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{J_{OB}\dot{\varphi}^2}{2}$$

С учетом выражения для масс $m_{AB} = km$:

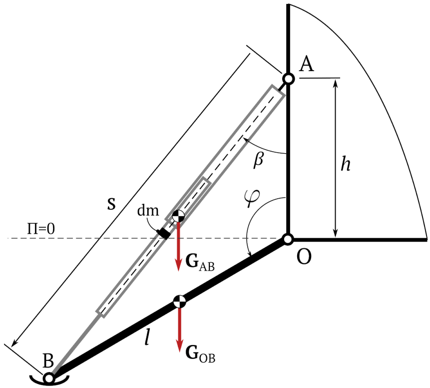
$$T = \frac{1}{6}(1+k)ml^2\dot{\varphi}^2$$

Обобщенные силы



- Движение посадочной опоры рассматривается относительно системы координат, связанной с корпусом возвращаемой ступени, которая движется в поле силы тяжести под действием силы тяги двигателя, создающей перегрузку n_x
- На посадочные опоры будут действовать переносные силы инерции G_{OB} и G_{AB}.

Обобщенные силы



При постоянной силе тяги обобщенные силы можно определить, используя выражение для потенциальной энергии посадочной опоры:

$$\Pi = \Pi_{OB} + \Pi_{AB}$$

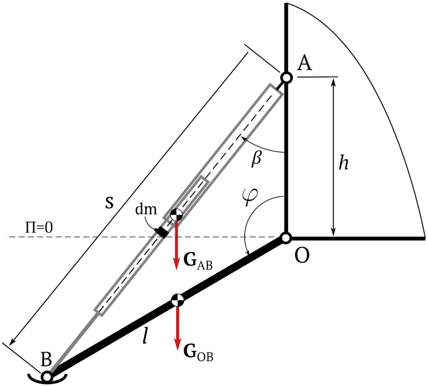
где

$$\Pi_{OB} = m_{OB} g n_x \frac{l_{OB}}{2} \cos\varphi$$

и

$$\Pi_{AB} = m_{AB} g n_x \left[h + \frac{s}{2} \cos(\pi - \beta) \right]$$

Обобщенные силы



Для известного выражения потенциальной энергии, обобщенная сила будет определяться выражением:

$$Q_{\varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$$

$$Q_{\varphi} = -\frac{1}{2} g(k+1) l m n_x \sin\varphi$$

Уравнения движения

Кинетическая и потенциальная энергия:

$$T = \frac{1}{6}(1+k)ml^2\dot{\varphi}^2, \quad Q_\varphi = -\frac{1}{2}g(k+1)lmn_x \sin\varphi$$

Уравнения движения:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{n_x g}{l}\sin\varphi$$

При принятых допущениях, если движение системы происходит только под действием переносной силы инерции, уравнение движения посадочной опоры имеет вид уравнения нелинейного математического маятника и не зависит от масс элементов, а определяется только длиной опорного подкоса и перегрузкой возвращаемой ступени

Задание

Определите угловую скорость опорного подкоса при раскрытии посадочной опоры при следующий параметрах посадочной опоры и начальных условиях:

- масса опорного подкоса $m_{AB} = 250$ кг;
- масса телескопического подкоса $m_B = 150$ кг;
- длина опорного подкоса $l = 6.5$ м;
- конечная длина телескопического подкоса $s_k = 8$ м;
- конечный угол поворота опорного подкоса $\varphi_k = 120^o$;
- начальная угловая скорость подкоса $\dot{\varphi}(0) = 5^o/c$ (при $\varphi_0 = 0$);
- $n_x = 1$.

Оцените максимальную силу растяжения телескопического подкоса после раскрытия опоры: считая, что в момент полного раскрытия опоры он имеет жесткость на растяжение $c = 10^5$ Н/м.