Кватернионы

Динамика твёрдого тела и систем твёрдых тел

Юдинцев В. В.

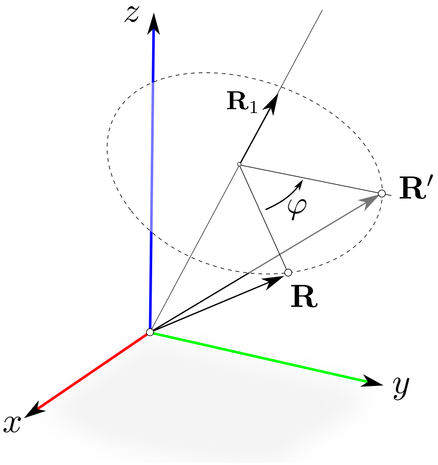
Кафедра теоретической механики

27 октября 2021 г.

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Определение

Ортогональное преобразование



$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{R}_1, \ \lambda_1 = 1 \qquad (1)$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{A} - 1}{2} \qquad (2)$$

- $\boldsymbol{R}_1$ – направление оси вращения
- φ – угол поворота
- 9 элементов матрицы определяют поворот, описываемый 3 параметрами

Четырёхмерный вектор

Рассмотрим элемент четырёхмерного пространства – четырёхмерный вектор:

$$\boxed{\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 \boldsymbol{i}_0 + \lambda_1 \boldsymbol{i}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{i}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{i}_3} \tag{3}$$

где $\lambda_0, \ldots, \lambda_3$ – числа, $\boldsymbol{i}_0, \ldots, \boldsymbol{i}_3$ – единичные орты.

Алгебра кватернионов

Определим в пространстве операцию умножения

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}}$$

со следующими свойствами:

1. ассоциативность

$$\boldsymbol{A} \circ (\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \circ \boldsymbol{C} \tag{4}$$

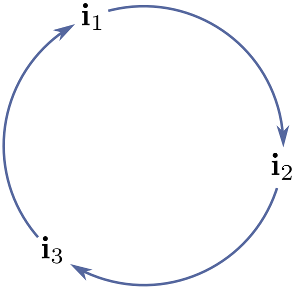
2. дистрибутивность

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \circ (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{C} + \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{D} \tag{5}$$

3. для любых скаляров λ, μ выполняется:

$$(\lambda \boldsymbol{A}) \circ (\mu \boldsymbol{B}) = \lambda\mu \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} \tag{6}$$

Правила умножения



$$
\begin{aligned}
&i_0 \circ i_k = i_k, && k = 0, 1, 2, 3,\\
&i_k \circ i_0 = i_k, && k = 0, 1, 2, 3,\\
&i_k \circ i_k = -i_0, && k = 1, 2, 3,\\
&i_1 \circ i_2 = +i_3, &&\\
&i_2 \circ i_3 = +i_1, &&\\
&i_3 \circ i_1 = +i_2, &&\\
&i_2 \circ i_1 = -i_3, &&\\
&i_3 \circ i_2 = -i_1, &&\\
&i_1 \circ i_3 = -i_2 &&
\end{aligned}
$$

Кватернион

Определение

При выполнении условий (4)-(6) и представленных правил умножения, четырехмерные векторы (3) называются **кватернионами**.

Геометрическая интерпретация

1. $\boldsymbol{i}_0$ - вещественная единица,
2. $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ - орты некоторой системы координат евклидова пространства,

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \boldsymbol{i}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{i}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{i}_3 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}. \tag{7}$$

3. В качестве абстрактной операции умножения неодинаковых ортов, рассматривается операция векторного произведения:

$$\boxed{\boldsymbol{i}_k \circ \boldsymbol{i}_k = -1,\ \boldsymbol{i}_k \circ \boldsymbol{i}_m = \boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_m,\ k \neq m} \tag{8}$$

Произведение кватернионов

Вычисление произведения кватернионов

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{B} &= (\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}) \circ (b_0 + \boldsymbol{b}) \\
&= (\lambda_0 + \lambda_1 \boldsymbol{i}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{i}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{i}_3) \circ (b_0 + b_1 \boldsymbol{i}_1 + b_2 \boldsymbol{i}_2 + b_3 \boldsymbol{i}_3) = \\
&\lambda_0 b_0 + \lambda_1 b_1 \boldsymbol{i}_1 \circ \boldsymbol{i}_1 + \lambda_2 b_2 \boldsymbol{i}_2 \circ \boldsymbol{i}_2 + \lambda_3 b_3 \boldsymbol{i}_3 \circ \boldsymbol{i}_3 + \\
&+ \lambda_0 \boldsymbol{b} + b_0 \boldsymbol{\lambda} + \underbrace{\lambda_1 b_2 \boldsymbol{i}_3 - \lambda_1 b_3 \boldsymbol{i}_2 - \lambda_2 b_1 \boldsymbol{i}_3 + \lambda_2 b_3 \boldsymbol{i}_1 + \lambda_3 b_1 \boldsymbol{i}_2 - \lambda_3 b_2 \boldsymbol{i}_1}_{\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{b}} = \\
&= \underbrace{\lambda_0 b_0 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{b}}_{\text{скалярная часть}} + \underbrace{\lambda_0 \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\lambda} b_0 + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{b}}_{\text{векторная часть}}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Умножение кватернионов не обладает свойством коммутативности

$$\boxed{\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{\Lambda}}$$

Свойства и определения

Определения

- Сопряженный кватернион $\overline{\Lambda}$:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}, \ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda} \tag{10}$$

- Норма кватерниона:

$$|\boldsymbol{\Lambda}| = \boldsymbol{\Lambda} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = \overline{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \tag{11}$$

- Обратный кватернион:

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \frac{\overline{\boldsymbol{\Lambda}}}{|\boldsymbol{\Lambda}|}, \ |\boldsymbol{\Lambda}| \neq 0. \tag{12}$$

Свойства

Для произведения кватернионов выполняются следующие свойства:

$$\overline{\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{B}} \circ \overline{\boldsymbol{A}}. \tag{13}$$

Норма произведения двух кватернионов равна произведению норм кватернионов:

$$|\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}| = (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \circ (\overline{\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}}) = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} \circ \overline{\boldsymbol{B}} \circ \overline{\boldsymbol{A}} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{14}$$

Свойства

Операция произведения кватернионов инвариантна по отношению к ортогональным преобразованиям их векторной части. То есть если:

$$C_0 + \boldsymbol{C} = (\Lambda_0 + \boldsymbol{\Lambda}) \circ (B_0 + \boldsymbol{B}), \tag{15}$$

то

$$C_0 + \boldsymbol{C}' = (\Lambda_0 + \boldsymbol{\Lambda}') \circ (B_0 + \boldsymbol{B}'), \tag{16}$$

где $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, $\Lambda' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$ – матрица поворота .
Это свойство позволяет переставлять местами операции ортогонального преобразования и умножения кватернионов.

Присоединённое отображение

Присоединённое отображение

Рассмотрим преобразование кватерниона $\boldsymbol{R} = r_0 + \boldsymbol{r}$:

$$\boxed{\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{R} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}}} \quad |\boldsymbol{\Lambda}| = 1. \tag{17}$$

Преобразование (17), не меняет скалярной части кватерниона $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{R} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ (r_0 + \boldsymbol{r}) \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ r_0 \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} + \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{r} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}}.$$

Первое слагаемое равно r_0, а второе слагаемое не имеет скалярной части, поскольку сопряженный кватернион соответствующий второму слагаемому отличается от исходного только знаком:

$$\overline{\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{r} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \overline{\boldsymbol{r}} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = -\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{r} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}}.$$

Присоединённое отображение

При преобразовании

$$\boxed{\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{R} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}}} \quad |\boldsymbol{\Lambda}| = 1 \tag{18}$$

сохраняется норма кватерниона $\boldsymbol{R}$:

$$|\boldsymbol{R}'| = |\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{\Lambda}| = |\boldsymbol{\Lambda}||\boldsymbol{R}||\boldsymbol{\Lambda}| = |\boldsymbol{R}|.$$

Скалярная часть кватерниона $\boldsymbol{R}$ при преобразовании (18) не меняется, следовательно:

$$|\boldsymbol{r}'| = |\boldsymbol{r}|.$$

Тригонометрическая форма записи

Кватернион $\mathbf{\Lambda}$ с единичной нормой может быть представлен в виде:

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 + \lambda \boldsymbol{e}, \ |\boldsymbol{e}| = 1, \ \lambda_0^2 + \lambda^2 = 1.$$

Скаляры λ_0 и λ определяются следующим образом:

$$\lambda_0 = \cos\frac{\varphi}{2}, \ \lambda = \sin\frac{\varphi}{2}.$$

$$\boxed{\mathbf{\Lambda} = \cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{e}\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Преобразование вращения

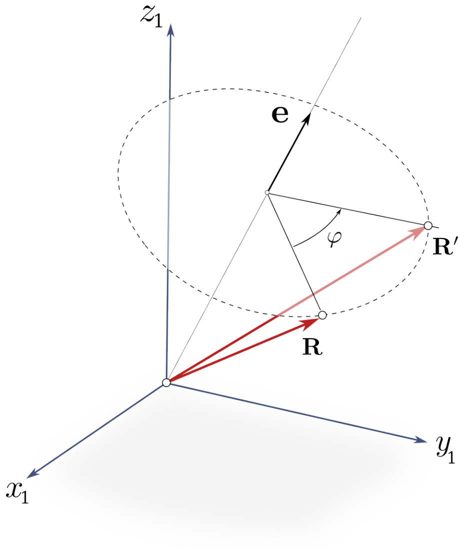
Теорема

Пусть $\mathbf{\Lambda}$ *и* $\boldsymbol{R}$ *нескалярные кватернионы; в этом случае величина*

$$\boldsymbol{R}' = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{R} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}} \tag{19}$$

есть кватернион, норма и скалярная часть которого равны норме и скалярной части кватерниона $\mathbf{R}$*, а векторная часть* $\mathbf{R}'$ *получается вращением векторной части* $\mathbf{R}$ *по конусу вокруг оси вектора, определяемой векторной частью* $\mathbf{\Lambda}$*.*

Преобразование вращения



Если

$$\boldsymbol{\Lambda} = \cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{e}\sin\frac{\varphi}{2},$$

то векторная часть $\boldsymbol{R}'$ получится вращением векторной части $\boldsymbol{R}$ вокруг оси $\boldsymbol{e}$ на угол φ:

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{R} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}}$$

Пример: поворот вокруг оси X

Пусть вектор $\boldsymbol{e}$ совпадает с ортом $\boldsymbol{i}$ исходной системы координат:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Орты новой системы:

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{i} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = (\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \boldsymbol{i} \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{i}\sin\frac{\varphi}{2}), \tag{20}$$

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{j} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = (\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \boldsymbol{j} \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{i}\sin\frac{\varphi}{2}), \tag{21}$$

$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{k} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = (\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\varphi}{2}) \circ \boldsymbol{k} \circ (\cos\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{i}\sin\frac{\varphi}{2}), \tag{22}$$

Матрица поворота

Орты новой системы:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{i}' &= \boldsymbol{i},\\
\boldsymbol{j}' &= \boldsymbol{j}\cos\varphi + \boldsymbol{k}\sin\varphi,\\
\boldsymbol{k}' &= -\boldsymbol{j}\sin\varphi + \boldsymbol{k}\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Т.е. соответствующая матрица $\boldsymbol{A}$ имеет вид:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{23}
$$

Сложение поворотов

Активная точка зрения

- Первый поворот:

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{R} \circ \overline{\boldsymbol{A}}$$

- Второй поворот:

$$\boldsymbol{R}'' = \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{R}' \circ \overline{\boldsymbol{B}}$$

- Результирующий поворот:

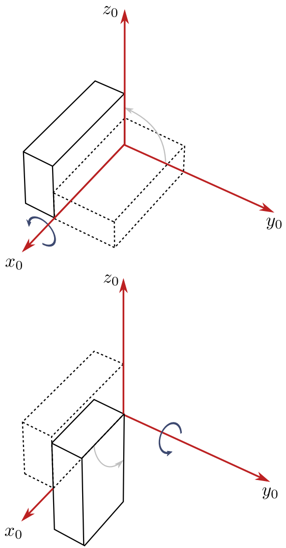
$$\boldsymbol{R}'' = \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{R} \circ \overline{\boldsymbol{A}} \circ \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{R} \circ \overline{\boldsymbol{C}}$$

Кватернионы последовательных поворотов записываются *в исходном базисе* и перемножаются *в обратном порядке*.

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{A}}$$

Активная точка зрения

Пример



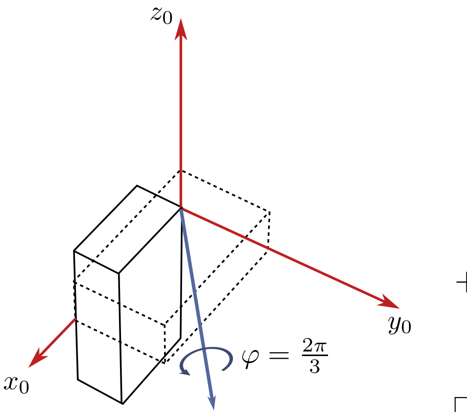
- Поворот вокруг оси x_0 на угол $\varphi_1 = \pi/2$:

$$\boldsymbol{A} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{e}_x \sin\frac{\pi}{4}$$

- Поворот вокруг оси y_0 на угол $\varphi_2 = \pi/2$

$$\boldsymbol{B} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{e}_y \sin\frac{\pi}{4}$$

Пример



$$\mathbf{C} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathbf{e}_x + \tfrac{1}{2}\mathbf{e}_x - \tfrac{1}{2}\mathbf{e}_z$$

Итоговое преобразование:

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{A}}$$

$$\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{A} = (\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{e}_y \sin\frac{\pi}{4}) \circ$$
$$(\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{e}_x \sin\frac{\pi}{4}) = \cos^2\frac{\pi}{4} +$$
$$+ \frac{1}{2}\mathbf{e}_x \sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y \sin\frac{\pi}{2} - \mathbf{e}_z \sin^2\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y - \frac{1}{2}\mathbf{e}_z =$$

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \cos\frac{\pi}{3} + \frac{(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z)}{\sqrt{3}} \sin\frac{\pi}{3}}$$

Пассивная точка зрения (поворот базиса)

- Вектор в исходном базисе:

$$\boldsymbol{R} = x\mathbf{e}_1^0 + y\mathbf{e}_2^0 + z\mathbf{e}_3^0$$

- Вектор в новом базисе:

$$\boldsymbol{R} = x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1$$

- Поворот базисных векторов:

$$\boldsymbol{e}_1^1 = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{e}_1^0 \circ \overline{\boldsymbol{A}}, \quad \boldsymbol{e}_2^1 = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{e}_2^0 \circ \overline{\boldsymbol{A}}, \quad \boldsymbol{e}_3^1 = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{e}_3^0 \circ \overline{\boldsymbol{A}}, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{e}_1^0 = \overline{\boldsymbol{A}} \circ \boldsymbol{e}_1^1 \circ \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{e}_2^0 = \overline{\boldsymbol{A}} \circ \boldsymbol{e}_2^1 \circ \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{e}_3^0 = \overline{\boldsymbol{A}} \circ \boldsymbol{e}_3^1 \circ \boldsymbol{A}. \tag{25}$$

Пассивная точка зрения (поворот базиса)

- Вектор $\boldsymbol{R}$ в исходном и в новом базисе:

$$\boldsymbol{R} = \mathbf{e}_1^0 x + \mathbf{e}_2^0 y + \mathbf{e}_3^0 z = \boldsymbol{A} \circ (\mathbf{e}_1^0 x' + \mathbf{e}_2^0 y' + \mathbf{e}_3^0 z') \circ \overline{\boldsymbol{A}}$$

- Для

$$\mathbf{e}_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{R}' \circ \overline{\boldsymbol{A}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{R}' = \overline{\boldsymbol{A}} \circ \boldsymbol{R}' \circ \boldsymbol{A}} \tag{26}$$

Если преобразование единичных векторов базиса определяется операцией (24), то преобразование координат неизменного вектора $\boldsymbol{R}$ определяется обратной операцией (26).

Параметры Родрига-Гамильтона

Определение

Компоненты кватерниона в базисе, преобразуемом этим кватернионом, заданные в форме

$$\lambda_0 = \cos\frac{\varphi}{2},\ \lambda_1 = \boldsymbol{e}_x \sin\frac{\varphi}{2},\ \lambda_2 = \boldsymbol{e}_y \sin\frac{\varphi}{2},\ \lambda_3 = \boldsymbol{e}_z \sin\frac{\varphi}{2} \tag{27}$$

называются параметрами Родрига-Гамильтона.

Параметры Родрига-Гамильтона

Кватернион, компонентами которого являются параметры Родрига-Гамильтона, имеет одинаковые компоненты в исходной и новой (повёрнутой) системах координат – это собственный кватернион преобразования $\boldsymbol{\Lambda}^*$.

- Для преобразования

$$\boldsymbol{e}^0 \xrightarrow{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{e}^1,$$

- компоненты кватерниона преобразования в новом базисе:

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(1)} = \overline{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

Сложный поворот

- Первый поворот $\boldsymbol{e}^0 \xrightarrow{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{e}^1$:

$$\boldsymbol{R}' = \overline{\boldsymbol{A}} \circ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{A}$$

- Второй поворот $\boldsymbol{e}^1 \xrightarrow{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{e}^2$:

$$\boldsymbol{R}'' = \overline{\boldsymbol{B}} \circ \boldsymbol{R}' \circ \boldsymbol{B}$$

- Результирующий поворот $\boldsymbol{e}^0 \xrightarrow{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{e}^2$:

$$\boldsymbol{R}'' = \overline{\boldsymbol{B}} \circ \overline{\boldsymbol{A}} \circ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = \overline{\boldsymbol{C}} \circ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{C}, \quad \boxed{\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}}$$

Кватернионы последовательных поворотов записываются *в поворачиваемых базисах* и перемножаются *в прямом порядке*.

Преобразования параметров

Кватернионы и ортогональные матрицы

Рассмотрим преобразование поворота

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{R} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}}$$

где $\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{R}' = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2 + z'\boldsymbol{e}_3$

$$\boldsymbol{R}' = (\lambda_0 + \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3) \circ \boldsymbol{R} \circ (\lambda_0 - \lambda_1\boldsymbol{e}_1 - \lambda_2\boldsymbol{e}_2 - \lambda_3\boldsymbol{e}_3)$$

Координаты нового вектора:

$$\begin{aligned}
x' &= (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)x + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3)y + 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)z,\\
y' &= 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)x + (\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)y + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)z,\\
z' &= 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)x + 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1)y + (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)z.
\end{aligned}$$

Кватернион $\to$ матрица поворота

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{bmatrix}$$

Матрица поворота $\to$ кватернион

$$\lambda_0^2 = \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{A} + 1}{4}, \tag{28}$$

$$\lambda_i^2 = \frac{a_{ii}}{2} - \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{A} - 1}{4}, \; i = 1, 2, 3. \tag{29}$$

Кватернионы и углы Эйлера

- Кватернионы поворотов вокруг осей z, x, z *поворачиваемых базисов*:

$$\boldsymbol{\Lambda}_\psi = \cos\frac{\psi}{2} + \mathbf{e}_z \sin\frac{\psi}{2}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_\theta = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_x \sin\frac{\theta}{2}, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_\varphi = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}_z \sin\frac{\varphi}{2}. \tag{32}$$

- Результирующий поворот

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_\psi \circ \boldsymbol{\Lambda}_\theta \circ \boldsymbol{\Lambda}_\varphi \tag{33}$$

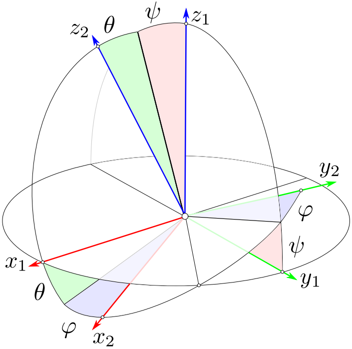
Углы Эйлера (Z-X-Z) $\to \Lambda$

Для последовательности $Z - X - Z\,(\psi, \theta, \varphi)$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= +\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2},\\
\lambda_1 &= +\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2},\\
\lambda_2 &= -\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},\\
\lambda_3 &= +\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}.
\end{aligned}
$$

Углы Брайнта (X-Y-Z) $\to \Lambda$

Для последовательности $X - Y - Z\,(\psi, \theta, \varphi)$:



$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2},\\
\lambda_1 &= \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2},\\
\lambda_2 &= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2},\\
\lambda_3 &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}.
\end{aligned}
$$

Матричная интерпретация

Матричная интерпретация

Определим орты кватерниона при помощи матриц:

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; i_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; i_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

где $i = \sqrt{-1}$.
Кватернион может быть записан в виде:

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$\boxed{\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_0 + i\lambda_3 & -\lambda_2 + i\lambda_1 \\ \lambda_2 + i\lambda_1 & \lambda_0 - i\lambda_3 \end{pmatrix}}$$

Свойства

1. Перемножение кватернионов выполняется как обычное перемножение матриц.
2. Сопряженный кватернион будет определятся, операцией транспонирования исходной матрицы и замены элементов на комплексно-сопряженные. Получившаяся матрица называется **эрмитово-сопряженной**: $\overline{\Lambda} = \Lambda^*$
3. Норма кватерниона вычисляется как определитель матрицы.

Параметры Кейли-Клейна

Кватернионы, задающие угловое положение твердого тела, описываются комплексными матрицами $\boldsymbol{\Lambda}$ со следующими свойствами:

$$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^* = \boldsymbol{E}, \ \det \boldsymbol{\Lambda} = 1.$$

Обозначив

$$\boldsymbol{a} = \lambda_0 + i\lambda_3, \quad \boldsymbol{b} = \lambda_2 + i\lambda_1,$$

матрицу кватерниона можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Параметры $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются параметрами Кейли-Клейна.

Список использованных источников

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в адачах ориентации твердого тела. Москва: Наука, 1973.
2. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. Издательство физико-математической литературы, 2001.