Основы динамики твёрдого тела

Динамика твёрдого тела и систем тел

Юдинцев В. В.

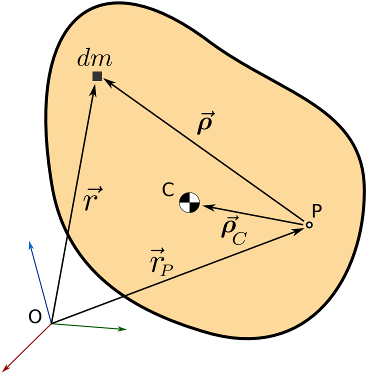
Кафедра теоретической механики

11 октября 2023 г.

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Тензор инерции твёрдого тела

Кинетический момент твёрдого тела [3]



Кинетический момент твёрдого тела относительно полюса O:

$$\mathbf{L}_O = \int_m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\, dm \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор положения элемента dm относительно полюса O:

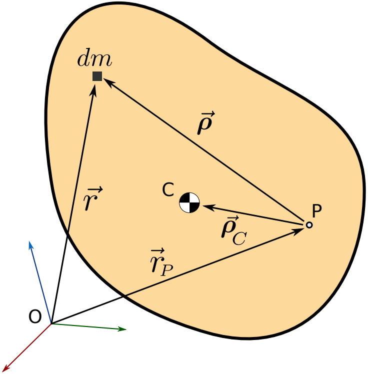
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\rho}\,. \tag{2}$$

Скорость

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}\,. \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела.

Кинетический момент твёрдого тела



После подстановки (2) и (3) в (1):

$$\mathbf{L}_O = \int_m (\mathbf{r}_P + \boldsymbol{\rho}) \times (\mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm =$$
$$= \mathbf{r}_P \times (\mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C) m + \boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{v}_P m +$$
$$+ \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm. \quad (4)$$

В (4) использовалось определение центра масс системы:

$$\int_m \boldsymbol{\rho}\, dm = m \boldsymbol{\rho}_C. \quad (5)$$

Кинетический момент твёрдого тела

Последнее слагаемое под интегралом содержит вектор угловой скорости, не зависящий от распредления массы внутри тела (это распределение определяет вектор $\boldsymbol{\rho}$)

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_P \times (\mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C)m + \boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{v}_P m + \boxed{\int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})dm} \tag{6}$$

После преобразования двойного векторного произведения:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \underbrace{(E\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{c}\,\vec{a})}_{\text{тензор}} \cdot \vec{b}, \tag{7}$$

последнее слагаемое в выражении (6) принимает вид:

$$\boxed{\int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})dm} = \int_m (\mathbf{E}\underbrace{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}}_{\text{ск. пр.}} - \underbrace{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}_{\text{диадное произв.}})dm \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{8}$$

Скалярное и диадное произведение

Координатная форма

Скалярное произведение

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{9}$$

Диадное произведение

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} \tag{10}$$

Тензор инерции

$$\boxed{\int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})} = \int_m (\mathbf{E} \underbrace{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}}_{\text{ск. пр.}} - \underbrace{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}}_{\text{диадное произв.}}) dm \cdot \boldsymbol{\omega}. \qquad (11)$$

Выражение перед угловой скоростью представляет собой тензор инерции твёрдого тела:

$$\boxed{\mathbf{J}_P = \int_m (\mathbf{E}\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}) dm} \qquad (12)$$

Интегрирование проводится по всему объему тела.

Пример

Тензор инерции цилиндра относительно системы координат, расположенной в центре масс. Продольная ось цилиндра - ось Cz. Координатный столбец элементарной массы dm:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}$$

Для цилиндра массы m радиуса R и высотой h:

$$dm = \frac{m}{\pi R^2 h} r\, d\varphi\, dr\, dz$$

Тензор инерции

$$\mathbf{J}_C = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (\mathbf{E}\boldsymbol{\rho}^T\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^T) \frac{m}{\pi R^2 h} r\, d\varphi\, dr\, dz$$

Пример. MATLAB

```
% Объявляем символьные переменные
% Необходим пакет Symbolic Math Toolbox
syms r phi z h R m;
% Вектор-столбец элемента dm
rho = [r*cos(phi);r*sin(phi);z];
% Элемент dm без дифференциалов dphi, dr, dz
dm  = m/(h*pi*R^2)*r;
% Подинтегральное выражение
expr = (eye(3)*(rho'*rho)-rho*rho')*dm;
% Интеграл по объему
J = int( int( int(expr, z,-h/2,h/2), phi,0,2*pi), r,0,R)
>>
J =
[(m*(3*R^2 + h^2))/12,                    0,             0]
[                   0, (m*(3*R^2 + h^2))/12,             0]
[                   0,                    0, (R^2*m)/2]
>> R=1; h=1; m=1;
>> eval(J)
    0.3333         0         0
         0    0.3333         0
         0         0    0.5000
```

Элементы тензора инерции

Тензор инерции в выбранном базисе есть симметричная матрица:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

элементы которой определяются следующим образом:

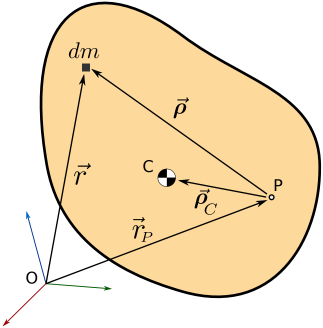
$$\begin{array}{l} J_{11} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2),\ J_{12} = J_{21} = -\sum_i m_i x_i y_i, \\ J_{22} = \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2),\ J_{23} = J_{32} = -\sum_i m_i y_i z_i, \\ J_{33} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2),\ J_{31} = J_{13} = -\sum_i m_i z_i x_i \end{array}$$

Внедиагональные элементы тензора называются центробежными моментами инерции.

Момент количества движения

Момент количества движения относительно полюса O:

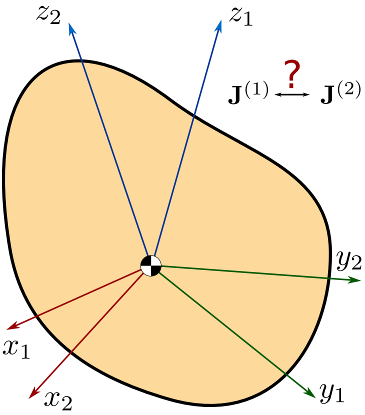
$$\boxed{\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_P \times (\mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C)m + \boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{v}_P m + \mathbf{J}_P \cdot \boldsymbol{\omega}} \qquad (13)$$



Если полюс P совпадает с центром масс тела:

$$\boxed{\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_P \times \mathbf{v}_P m + \mathbf{J}_P \cdot \boldsymbol{\omega}} \qquad (14)$$

Ортогональное преобразование тензора инерции



- При повороте базиса изменяются координаты вектора

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}^{12}\mathbf{r}^{(2)}. \tag{15}$$

- Как меняются компоненты тензора инерции?

$$\mathbf{J}^{(1)} = ???\ \mathbf{J}^{(2)}\ ???$$

Ортогональное преобразование тензора инерции

- Выражение для тензора инерции в базисе 1:

$$\mathbf{J}_O^{(1)} = \int_m (\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(1)})^T \mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(1)}(\mathbf{r}^{(1)})^T) dm \tag{16}$$

- Подставим $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}^{12}\mathbf{r}^{(2)}$ в выражение для тензора инерции (16):

$$\mathbf{J}_O^{(1)} = \int_m (\mathbf{E}\mathbf{r}^{(2)T}(\mathbf{A}^{12})^T \mathbf{A}^{12}\mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{A}^{12}\mathbf{r}^{(2)}\mathbf{r}^{(2)T}(\mathbf{A}^{12})^T) dm =$$

$$= \mathbf{A}^{12}\mathbf{J}_O^{(2)}(\mathbf{A}^{12})^T.$$

Ортогональное преобразование тензора инерции

- Выражение для тензора инерции в базисе 1:

$$\mathbf{J}_O^{(1)} = \int_m (\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(1)})^T \mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(1)}(\mathbf{r}^{(1)})^T) dm \tag{16}$$

- Подставим $\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}^{12}\mathbf{r}^{(2)}$ в выражение для тензора инерции (16):

$$\mathbf{J}_O^{(1)} = \int_m (\mathbf{E}\mathbf{r}^{(2)T}(\mathbf{A}^{12})^T\mathbf{A}^{12}\mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{A}^{12}\mathbf{r}^{(2)}\mathbf{r}^{(2)T}(\mathbf{A}^{12})^T) dm =$$

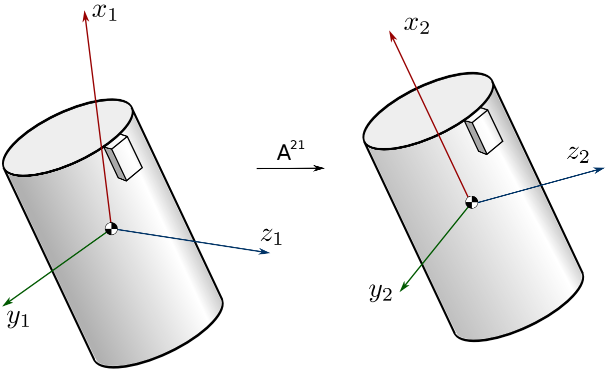
$$= \mathbf{A}^{12}\mathbf{J}_O^{(2)}(\mathbf{A}^{12})^T.$$

- Правило преобразования тензора инерции

$$\boxed{\mathbf{J}_O^{(1)} = \mathbf{A}^{12}\mathbf{J}_O^{(2)}(\mathbf{A}^{12})^T = \mathbf{A}^{12}\mathbf{J}_O^{(2)}\mathbf{A}^{21}}$$

Главные оси инерции

Для любого тензора инерции можно найти базис, в котором все центробежные моменты инерции равны нулю.



$$J^{(1)} = \begin{pmatrix} J_{xx}^{(1)} & -J_{xy}^{(1)} & -J_{xz}^{(1)} \\ -J_{yx}^{(1)} & J_{yy}^{(1)} & -J_{yz}^{(1)} \\ -J_{zx}^{(1)} & -J_{zy}^{(1)} & J_{zz}^{(1)} \end{pmatrix} \qquad J^{(2)} = \begin{pmatrix} J_{xx}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Главные оси инерции

$$\mathbf{J}^{(2)} = \begin{pmatrix} J_{xx}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(2)} \end{pmatrix}$$

- Оси базиса в котором центробежные моменты инерции равны нулю называются главными осями инерции
- Диагональные элементы тензора $J_{xx}^{(2)}, J_{yy}^{(2)}, J_{zz}^{(2)}$ – главные моменты инерции.

Главные оси инерции

$$\mathbf{J}^{(2)} = \begin{pmatrix} J_{xx}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(2)} \end{pmatrix}$$

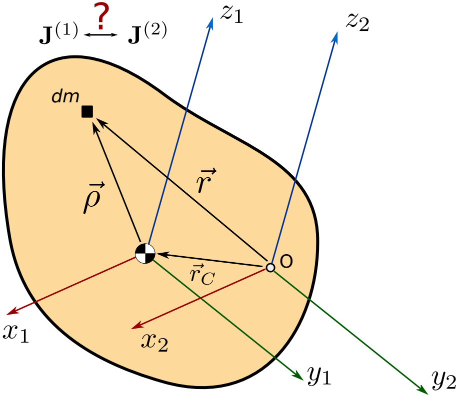
- Для определения главных моментов инерции необходимо найти собственные числа и векторы тензора инерции:

$$(\mathbf{J}^{(2)} - J_\alpha \mathbf{E})\mathbf{A}_\alpha^{21} = 0 \qquad (17)$$

- Собственные числа и будут являться главными моментами инерции J_α, а собственные векторы $\mathbf{A}_\alpha^{21}$ будут определять направление главных осей инерции.

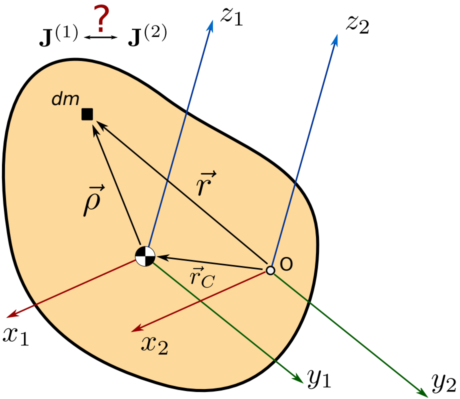
$$\det(\mathbf{J}^{(2)} - J_\alpha \mathbf{E}) = 0 \;\rightarrow\; J_\alpha = \ldots \qquad (18)$$

Параллельный перенос базиса



- Пусть в исходном положении полюс совпадал с центром масс C твёрдого тела, где находится неподвижный базис $Cx_1y_1z_1$.
- Найдем координаты тензора инерции в новом базисе $Ox_2y_2z_2$, который смещён относительно исходного базиса на вектор $\vec{r}_O = -\vec{r}_C$.

Параллельный перенос базиса



$$\mathbf{J}_C = \int_m (\boldsymbol{\rho}^2\mathbf{E} - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho})\,dm \tag{19}$$

$$\mathbf{J}_O = \int_m (\mathbf{r}^2\mathbf{E} - \mathbf{r}\mathbf{r})\,dm \tag{20}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\rho} \tag{21}$$

Параллельный перенос базиса

Учитывая, что $\int_m \boldsymbol{\rho}\, dm = 0$:

$$\mathbf{J}_O = \int_m [(\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho})^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho})(\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho})]\, dm =$$

$$= \int_m [(\mathbf{r}_C^2 + \rho^2)\mathbf{E} - (\mathbf{r}_C \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho})]\, dm =$$

$$= \mathbf{J}_C + (\mathbf{r}_C^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_C \mathbf{r}_C) m. \quad (22)$$

В координатной форме:

$$\boxed{\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_C + (\mathbf{r}_C^T \mathbf{r}_C \mathbf{E} - \mathbf{r}_C \mathbf{r}_C^T) m} \quad (23)$$

Формулы для элементов тензора инерции

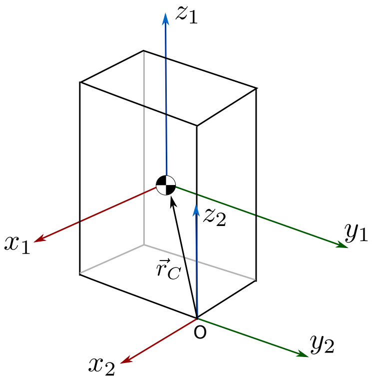
Элементы тензора инерции в новом базисе определяются следующим образом:

$$J^O_{\alpha\alpha} = J^C_{\alpha\alpha} + (r^2_{C\beta} + r^2_{C\gamma})m,$$
$$J^O_{\alpha\beta} = J^C_{\alpha\beta} + r_{C\alpha} r_{C\beta} m,$$
$$\alpha, \beta, \gamma - \text{различные}$$

Пример:

$$J^O_{xx} = J^C_{xx} + (y^2_C + z^2_C)m$$

Пример (MATLAB)




```
>> J1=[3 0 0; 0 2 0; 0 0 1] ;
>> m=2;
>> rc=[-0.5;-1;2];
>> J1 + (rc'*rc*eye(3)-rc*rc')*m
ans =
   13.0000   -1.0000    2.0000
   -1.0000   10.5000    4.0000
    2.0000    4.0000    3.5000
```

Инварианты и неравенства для моментов инерции

Коэффициенты уравнения $\det(\mathbf{J}^{(2)} - J_\alpha \mathbf{E}) = 0$

Уравнение $\det(\mathbf{J}^{(2)} - J_\alpha \mathbf{E}) = 0$ кубическое:

$$
\begin{aligned}
-J_\alpha^3 + \left(J_{11} + J_{22} + J_{33}\right) J_\alpha^2 + \\
+\left(J_{12}^2 + J_{13}^2 + J_{23}^2 - J_{11}J_{22} - J_{11}J_{33} - J_{22}J_{33}\right) J_\alpha - \\
- J_{11}J_{23}^2 - J_{13}^2 J_{22} - 2J_{12}J_{13}J_{23} - J_{12}^2 J_{33} + J_{11}J_{22}J_{33} = 0. \quad (24)
\end{aligned}
$$

Коэффициенты уравнения (24) не зависят от ориентации исходного базиса, так как от этого не зависят и главные моменты инерции (решение уравнения не зависят от исходного базиса), следовательно

$$\operatorname{tr}\mathbf{J} = J_{11} + J_{22} + J_{33} = J_1 + J_2 + J_3$$

$$(J_{11}J_{22} - J_{12}^2) + (J_{22}J_{33} - J_{23}^2) + (J_{33}J_{11} - J_{31}^2) = J_1J_2 + J_2J_3 + J_3J_1$$

$$\det\mathbf{J} = J_{11}J_{22}J_{33} - J_{11}J_{23}^2 - J_{22}J_{31}^2 - J_{33}J_{12}^2 - 2J_{12}J_{23}J_{31} = J_1J_2J_3$$

Неравенства для моментов инерции

Поскольку $J_\alpha \geq 0$, должны выполнятся следующие условия (критерий Сильвестра):

- Неотрицательность диагональных элементов

$$\boxed{J_{\alpha\alpha} \geq 0} \tag{25}$$

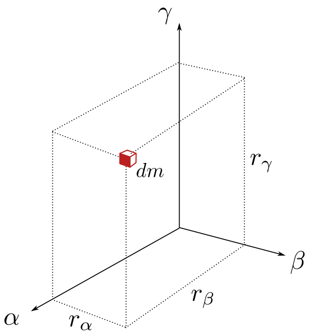
- Неотрицательность определителя

$$\boxed{\det J \geq 0} \tag{26}$$

- Неотрицательность миноров второго порядка

$$\boxed{J_{\alpha\alpha} J_{\beta\beta} - J_{\alpha\beta}^2 \geq 0, \ \alpha, \beta = 1, 2, 3; \ \alpha \neq \beta} \tag{27}$$

Неравенства для моментов инерции



- Из определения моментов инерции:

$$J_{\alpha\alpha} + J_{\beta\beta} = \int_m (r_\alpha^2 + r_\beta^2 + 2r_\gamma^2)dm =$$

$$= J_{\gamma\gamma} + 2\int_m r_\gamma^2 dm \Rightarrow$$

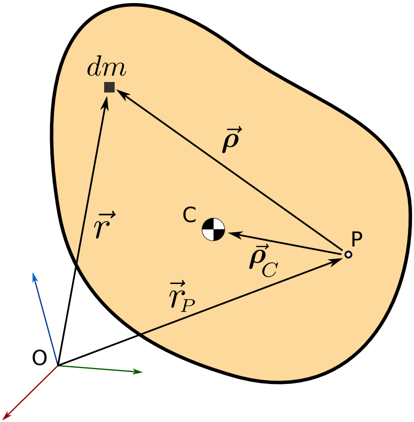
$$\boxed{J_{\alpha\alpha} + J_{\beta\beta} \geq J_{\gamma\gamma}} \qquad (28)$$

- Т.к. $(r_\beta \pm r_\gamma)^2 \geq 0 \Rightarrow r_\beta^2 + r_\gamma^2 \geq 2|r_\beta r_\gamma| \Rightarrow$

$$\boxed{J_{\alpha\alpha} \geq 2|J_{\beta\gamma}|, \ \alpha, \beta, \gamma - \text{различные}} \qquad (29)$$

Теорема об изменении момента количества движения

Теорема об изменении момента количества движения



$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{M}_O} \quad (30)$$

$$\mathbf{L}_O = \int_m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\, dm \quad (31)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \int_m \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}\, dm \quad (32)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\rho}, \quad (33)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \quad (34)$$

Производная кинетического момента

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \int_m (\mathbf{r}_P + \boldsymbol{\rho}) \times [\ddot{\mathbf{r}}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] dm =$$

$$= m(\mathbf{r}_P \times \underbrace{[\ddot{\mathbf{r}}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C)]}_{\ddot{\mathbf{r}}_C} + \boldsymbol{\rho}_C \times \ddot{\mathbf{r}}_P) +$$

$$+ \underbrace{\int_m \boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}) dm}_{\mathbf{J}^P \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}} + \underbrace{\int_m \underbrace{\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}))}_{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}))} dm}_{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}^P \cdot \boldsymbol{\omega}} \qquad (35)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_O = m(\mathbf{r}_P \times \ddot{\mathbf{r}}_C + \boldsymbol{\rho}_C \times \ddot{\mathbf{r}}_P) + \mathbf{J}^P \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}^P \cdot \boldsymbol{\omega} \qquad (36)$$

Главный момент сил

$$\dot{\mathbf{L}}_O = m(\mathbf{r}_P \times \ddot{\mathbf{r}}_C + \boldsymbol{\rho}_C \times \ddot{\mathbf{r}}_P) + \mathbf{J}^P \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}^P \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Учитывая правило приведения силы к новому центру

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_P + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F} \tag{37}$$

и теорему о движении центра масс системы:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F} \tag{38}$$

Теорема об изменении кинетического момента абсолютно твёрдого тела принимает вид:

$$\boxed{m\boldsymbol{\rho}_C \times \ddot{\mathbf{r}}_P + \mathbf{J}_P \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}^P \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_P} \tag{39}$$

Координатная форма

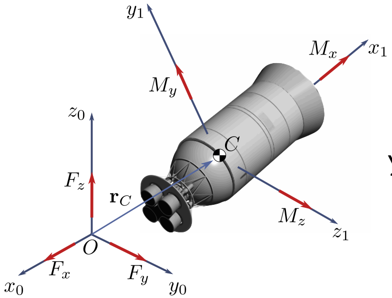
Если полюс P совпадает с центром масс C:

$$\boxed{\mathbf{J}_P \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_P \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}^P} \tag{40}$$

В проекциях на оси главной центральной системы координат, уравнение принимает вид:

$$J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 = M_1, \tag{41}$$
$$J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 = M_2, \tag{42}$$
$$J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 = M_3. \tag{43}$$

Уравнения движения



Динамические уравнения движения тела вокруг центра масс:

$$\begin{cases} J_x^{(1)}\dot{\omega}_x^{(1)} - (J_y^{(1)} - J_z^{(1)})\omega_y^{(1)}\omega_z^{(1)} = M_x^{(1)}, \\ J_y^{(1)}\dot{\omega}_y^{(1)} - (J_z^{(1)} - J_x^{(1)})\omega_z^{(1)}\omega_x^{(1)} = M_y^{(1)}, \\ J_z^{(1)}\dot{\omega}_z^{(1)} - (J_x^{(1)} - J_y^{(1)})\omega_x^{(1)}\omega_y^{(1)} = M_z^{(1)}. \end{cases}$$

Уравнения движения центра масс:

$$\begin{cases} m\ddot{x}^{(0)} = F_x^{(0)}, \\ m\ddot{y}^{(0)} = F_y^{(0)}, \\ m\ddot{z}^{(0)} = F_z^{(0)}. \end{cases}$$

Кинематические уравнения

- Для определения ориентации твёрдого тела уравнения движения интегрируют совместно и кинематическими уравнениями.
- Если для определения ориентации тела используются углы Эйлера, то кинематические уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\omega_x + \dfrac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\omega_y, \\ \dot{\vartheta} = \omega_x \cos\varphi - \omega_y \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} = -\omega_x \sin\varphi \operatorname{ctg}\vartheta - \omega_y \cos\varphi \operatorname{ctg}\vartheta + \omega_z, \end{cases} \tag{44}$$

где ψ, ϑ, φ – углы Эйлера, определяющие ориентацию базиса $Cx_1y_1z_1$ относительно $Ox_0y_0z_0$.

Список использованных источников

- Журавлев, В. Ф. Основы теоретической механики. М: Издательство физико-математической литературы. 2001.
- Бранец, В. Н., Шмыглевский, И. П. Применение кватернионов в адачах ориентации твердого тела. Москва: Наука. 1973.
- Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир. 1980.