Кинематические уравнения

Динамика твёрдого тела и систем тел

Юдинцев В. В.

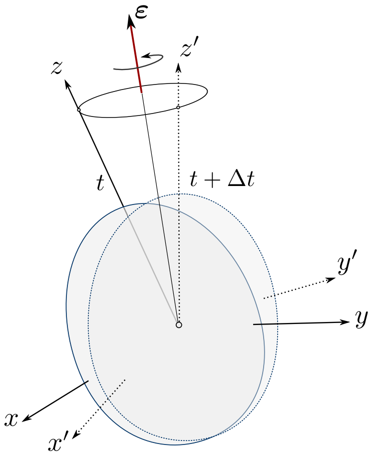
Кафедра теоретической механики

10 октября 2023 г.

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

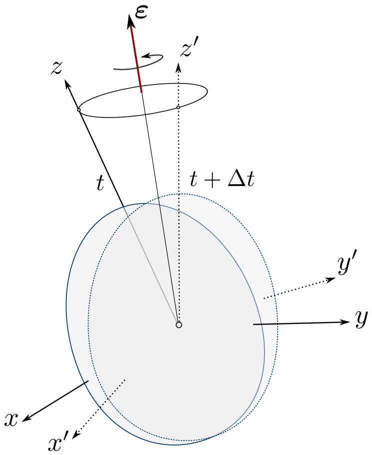
Угловая скорость

Угловая скорость [1]



В соответствии с теоремой Эйлера положение тела в момент $t+\Delta t$ может быть получено из начального положения поворотом вокруг оси $\boldsymbol{\varepsilon}(t+\Delta t)$ на угол $\Delta\varphi(t+\Delta t)$:

Угловая скорость [1]



В соответствии с теоремой Эйлера положение тела в момент $t+\Delta t$ может быть получено из начального положения поворотом вокруг оси $\boldsymbol{\varepsilon}(t+\Delta t)$ на угол $\Delta\varphi(t+\Delta t)$:

- вектор бесконечно малого поворота:

$$\Delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varepsilon}(t+\Delta t)\Delta\varphi(t+\Delta t)$$

- мгновенная угловая скорость:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi(t+\Delta t)}{\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}(t+\Delta t)}$$

Кватернион бесконечно малого поворота [2]

В момент времени t положение твёрдого тела определяется кватернионом:

$$\boldsymbol{\Lambda}(t) = \cos\frac{\varphi(t)}{2} + \mathbf{e}(t)\sin\frac{\varphi(t)}{2}. \tag{1}$$

В момент времени $t+\Delta t$:

$$\boldsymbol{\Lambda}(t+\Delta t) = \cos\frac{\varphi(t+\Delta t)}{2} + \mathbf{e}(t+\Delta t)\sin\frac{\varphi(t+\Delta t)}{2}. \tag{2}$$

Кватернион малого поворота:

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{\Lambda} = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \boldsymbol{\varepsilon}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx 1 + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2}} \tag{3}$$

Бесконечно малый поворот

Поворот вектора $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}' = \Delta\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{r} \circ \Delta\overline{\mathbf{\Lambda}} = \left(1 + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \circ \mathbf{r} \circ \left(1 - \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2}\right). \tag{4}$$

Раскрывая скобки в (4):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2} \circ \mathbf{r} - \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2} - \boldsymbol{\varepsilon} \circ \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi^2}{4}. \tag{5}$$

Для малого $\Delta\varphi$:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2} \circ \mathbf{r} - \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2}. \tag{6}$$

Формула Эйлера

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2} \circ \mathbf{r} - \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2}$$

Приращение вектора $\mathbf{r}$:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2} \circ \mathbf{r} - \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2} - \mathbf{r} = (\boldsymbol{\varepsilon}\Delta\varphi) \times \mathbf{r} \tag{7}$$

Скорость изменения вектора $\mathbf{r}$:

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \tag{8}$$

Формула Эйлера

Векторная формула:

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'} \tag{9}$$

Матричная формула:

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}}' = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}'} \tag{10}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ – матрица угловой скорости:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Кинематические уравнения

Кинематические уравнения

Угловую скорость тела выражают через производные параметров, задающих его угловое положение:

- кватернионы:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Lambda}, \dot{\boldsymbol{\Lambda}});$$

- углы Эйлера, Брайнта, ... :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{f}(\psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi});$$

- ортогональные матрицы:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{f}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}, \dot{a}_{11}, \dot{a}_{12}, \ldots, \dot{a}_{33}).$$

Производная кватерниона

Активная точка зрения

Используя закон сложения поворотов

$$\mathbf{\Lambda}(t+\Delta t) = \Delta\mathbf{\Lambda}(t)\circ\mathbf{\Lambda}(t) = \left(1+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\circ\Lambda(t). \tag{12}$$

Производная кватерниона

$$\boxed{\dot{\mathbf{\Lambda}} = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{\Lambda}(t+\Delta t)-\mathbf{\Lambda}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\circ\mathbf{\Lambda}(t)} \tag{13}$$

Угловая скорость

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = 2\dot{\mathbf{\Lambda}}\circ\overline{\mathbf{\Lambda}}} \tag{14}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ и кватернион $\mathbf{\Lambda}(t)$ заданы в неподвижном базисе.

Производная кватерниона

Пассивная точка зрения

Для пассивной точки зрения

$$\boldsymbol{\Lambda}(t+\Delta t) = \boldsymbol{\Lambda}(t) \circ \Delta\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(t) \circ \left(1 + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \tag{15}$$

Производная кватерниона

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \lim_{t\to 0}\frac{\boldsymbol{\Lambda}(t+\Delta t) - \boldsymbol{\Lambda}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}(t) \circ \boldsymbol{\omega}} \tag{16}$$

Угловая скорость

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = 2\overline{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \dot{\boldsymbol{\Lambda}}} \tag{17}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ и кватернион $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ заданы базисе, связанном с телом.

Кинематические уравнения

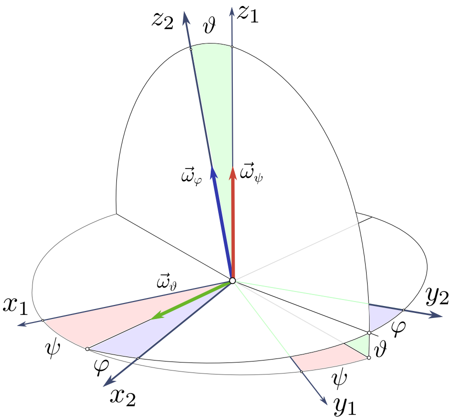
Координатная форма уравнения (17)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

Обратное преобразование

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^T \\ \boldsymbol{\omega} & -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Углы Эйлера

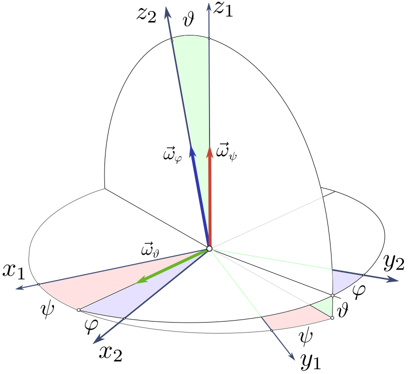


Найдем угловую скорость тела, вращающегося вокруг неподвижной точки по известным законам изменения углов Эйлера:

$$\psi = f_1(t),\ \vartheta = f_2(t),\ \varphi = f_3(t).$$

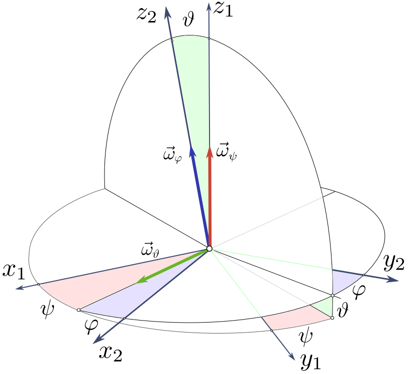
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\,\mathbf{e}_3^1 + \dot{\vartheta}\,\mathbf{e}_1' + \dot{\varphi}\,\mathbf{e}_3^2.$$

Проекции подвижные оси



Орты	$\mathbf{e}_1^2$	$\mathbf{e}_2^2$	$\mathbf{e}_3^2$
$\mathbf{e}_3^1$	$\sin\vartheta\sin\varphi$	$\sin\vartheta\cos\varphi$	$\cos\vartheta$
$\mathbf{e}_1^{\prime}$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$\mathbf{e}_3^2$	0	0	1

Проекции на неподвижные оси



Орты	$\mathbf{e}_1^1$	$\mathbf{e}_2^1$	$\mathbf{e}_3^1$
$\mathbf{e}_3^1$	0	0	1
$\mathbf{e}_1^{\prime}$	$\cos\psi$	$-\sin\psi$	0
$\mathbf{e}_3^2$	$\sin\vartheta\sin\psi$	$-\sin\vartheta\cos\psi$	$\cos\vartheta$

Кинематические уравнения Эйлера

В проекциях на подвижные оси

Зная проекции осей элементарных вращений на оси подвижной системы координат, получим выражения для проекций угловой скорости тела на подвижные оси:

$$\begin{cases} \omega_{x_2} = \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi, \\ \omega_{y_2} = \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi, \\ \omega_{z_2} = \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}. \end{cases} \tag{20}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\omega_{x_2} + \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\omega_{y_2}, \\ \dot{\vartheta} = \omega_{x_2}\cos\varphi - \omega_{y_2}\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} = -\omega_{x_2}\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\vartheta - \omega_{y_2}\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\vartheta + \omega_{z_2}. \end{cases} \tag{21}$$

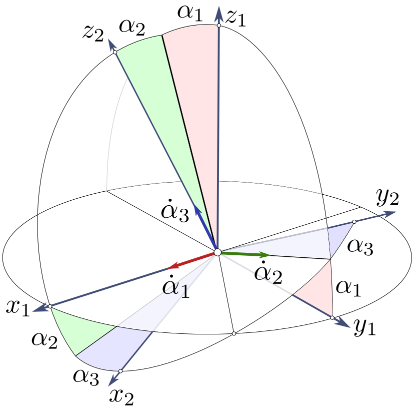
Кинематические уравнения Эйлера

В проекциях на неподвижные оси

Проекции угловой скорости на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{cases} \omega_{x_1} & = & \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta, \sin\psi, \\ \omega_{y_1} & = & \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta, \cos\psi, \\ \omega_{z_1} & = & \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \end{cases} \tag{22}$$

Углы Брайнта



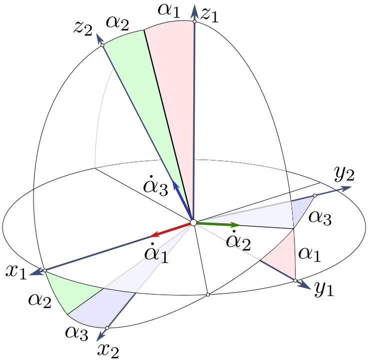
Найдём угловую скоростью тела, вращающегося вокруг неподвижной точки по известным законам изменения углов Брайнта:

$$\alpha_1 = f_1(t), \alpha_2 = f_2(t), \alpha_3 = f_3(t).$$

Угловую скорость вращения тела представим в виде суммы трех вращений, соответствующих изменению углов α_1, α_2 и α_3:

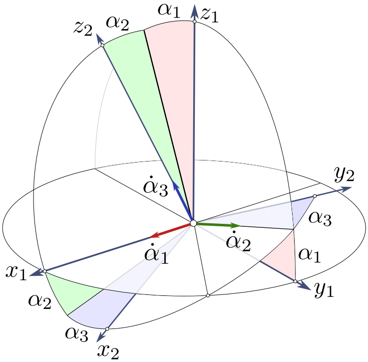
$$\boldsymbol{\omega} = \dot\alpha_1\, \mathbf{e}_1^1 + \dot\alpha_2\, \mathbf{e}_2' + \dot\alpha_3\, \mathbf{e}_3^2. \qquad (23)$$

Проекции на подвижные оси



Орты	$\mathbf{e}_1^2$	$\mathbf{e}_2^2$	$\mathbf{e}_3^2$
$\mathbf{e}_1^1$	$\cos\alpha_2\cos\alpha_3$	$-\cos\alpha_2\sin\alpha_3$	$\sin\alpha_2$
$\mathbf{e}_2^{\prime}$	$\sin\alpha_3$	$\cos\alpha_3$	0
$\mathbf{e}_3^2$	0	0	1

Проекции на неподвижные оси



Орты	$\mathbf{e}_1^1$	$\mathbf{e}_2^1$	$\mathbf{e}_3^1$
$\mathbf{e}_1^1$	1	0	0
$\mathbf{e}_2^{\prime}$	0	$\cos\alpha_1$	$\sin\alpha_1$
$\mathbf{e}_3^2$	$\sin\alpha_2$	$-\cos\alpha_2\sin\alpha_1$	$\cos\alpha_2\cos\alpha_1$

Кинематические уравнения для углов Брайнта

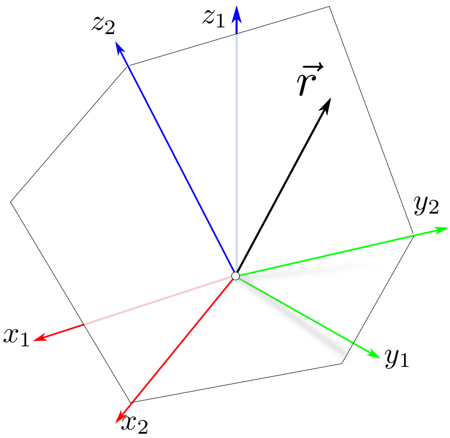
Проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат будут иметь вид:

$$\left\{\begin{array}{lll} \omega_{x_2} & = & \dot{\alpha}_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \dot{\alpha}_1 \sin\alpha_3, \\ \omega_{y_2} & = & -\dot{\alpha}_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 + \dot{\alpha}_2 \cos\alpha_3, \\ \omega_{z_2} & = & \dot{\alpha}_1 \sin\alpha_2 + \dot{\alpha}_3 \end{array}\right. \tag{24}$$

Решая эту систему относительно $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3$, получим кинематические дифференциальные уравнения для углов Брайнта:

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{\alpha}_1 & = & \frac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_2}\omega_{x_2} - \frac{\sin\alpha_3}{\cos\alpha_2}\omega_{y_2}, \\ \dot{\alpha}_2 & = & \sin\alpha_3 \omega_{x_2} + \cos\alpha_3 \omega_{y_2}, \\ \dot{\alpha}_3 & = & -\cos\alpha_3 \tan\alpha_2 \omega_{x_2} + \sin\alpha_3 \tan\alpha_2 \omega_{y_2} + \omega_{z_2}. \end{array}\right. \tag{25}$$

Направляющие косинусы



- Пусть система координат $Ox_2y_2z_2$, жестко связанная с твердым телом, вращается относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$.
- С системой координат $Ox_2y_2z_2$ жестко связан неизменный вектор $\vec{r}$.
- Координатный столбец вектора $\vec{r}$ в неподвижном базисе $\mathbf{r}^{(1)}$ и координатный столбец этого вектора в подвижном базисе $\mathbf{r}^{(2)}$ связаны соотношением:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}^{12}\mathbf{r}^{(2)}. \qquad (26)$$

Производная вектора [3]

Продифференцировав (26):

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{A}^{12}\mathbf{r}^{(2)},$$

получим:

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \dot{\mathbf{A}}^{12}\mathbf{r}^{(2)}. \tag{27}$$

Абсолютная производная вектора $\vec{r}$, жестко свзанного с подвижным базисом, определяется соотношением:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{28}$$

в матричной координатной форме (в неподвижном базисе):

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \mathbf{A}^{(12)}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}\mathbf{r}^{(2)}. \tag{29}$$

Матрица угловой скорости

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \mathbf{A}^{(12)}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}\mathbf{r}^{(2)}.$$

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}$ – кососимметричная матрица проекций угловых скоростей на оси координат:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{z_2} & \omega_{y_2} \\ \omega_{z_2} & 0 & -\omega_{x_2} \\ -\omega_{y_2} & \omega_{x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Производные от направляющих косинусов

Сравнивая

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \mathbf{A}^{(12)}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}\mathbf{r}^{(2)}. \tag{30}$$

и

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)} = \dot{\mathbf{A}}^{12}\mathbf{r}^{(2)}, \tag{31}$$

получим дифференциальные уравнения для направляющих косинусов в матричной форме.

Для матрицы преобразования координат из базиса 2 в базис 1:

$$\boxed{\dot{\mathbf{A}}^{12} = \mathbf{A}^{12}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}} \tag{32}$$

Для матрицы преобразования координат из базиса 1 в базис 2:

$$\boxed{\dot{\mathbf{A}}^{21} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}\mathbf{A}^{21}} \tag{33}$$

Список использованных источников

- Журавлев, В. Ф. Основы теоретической механики. М: Издательство физико-математической литературы. 2001.
- Бранец, В. Н., Шмыглевский, И. П. Применение кватернионов в адачах ориентации твердого тела. Москва: Наука. 1973.
- Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир. 1980.