Уравнения движения систем со сферическими шарнирами

Динамика твёрдого тела и систем тел

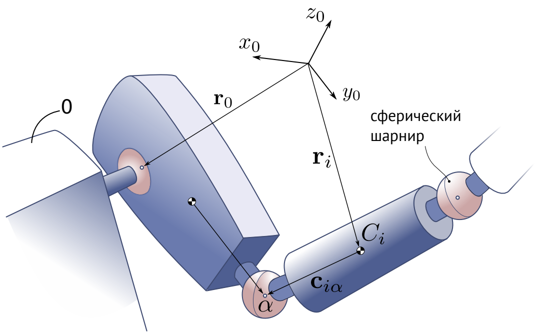
Юдинцев В. В.

27 февраля 2019 г.

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Введение

Рассматриваемый класс механических систем



- Структура взаимосвязей тел системы описывается ациклическим связанным графом – деревом.
- Одно из тел присоединено к телу 0, движение которого известно.
- Тела, связаны сферическими шарнирами.

Метод Й. Виттенбурга

- Для записи уравнений используются шарнирные координаты (углы Эйлера, Брайнта).
- В уравнения движения не входят реакции связей.
- Динамические уравнения:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}). \tag{1}$$

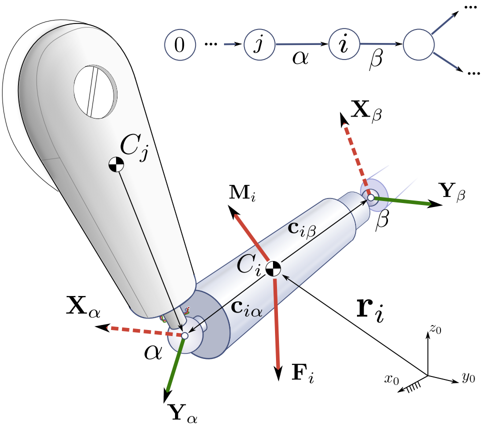
- Кинематические уравнения:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}). \tag{2}$$

Й. Виттенбург Динамика систем твёрдых тел / М.: Мир, 1980.

Уравнения движения

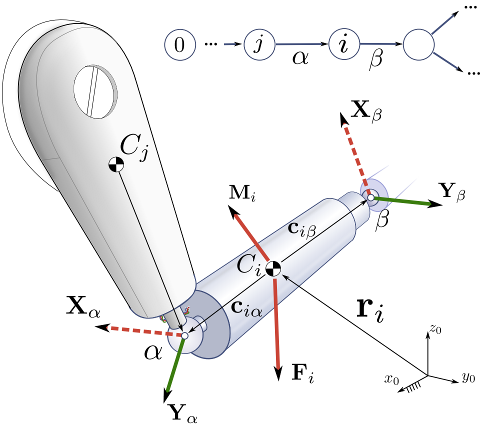
Уравнения движения центра масс



- $\mathbf{F}_{\rm i}$ – главный вектор внешних сил, действующих на тело $\rm i$.
- $\mathbf{M}_{\rm i}$ – главный момент, действующий на тело $\rm i$.
- $\mathbf{X}_\alpha$ – сила реакции в шарнире α.
- $\mathbf{c}_{{\rm i}\alpha}, \mathbf{c}_{{\rm i}\beta}$ – шарнирные векторы.

$$\mathrm{m_i}\ddot{\mathbf{r}}_{\rm i} = \mathbf{F}_{\rm i} + \sum_{\alpha=1}^{\rm n} \mathrm{S}_{{\rm i}\alpha}\mathbf{X}^{\rm c}_\alpha, \quad {\rm i} = 1, \ldots, {\rm n}.$$

Уравнения движения вокруг центра масс



- $\mathbf{L}_\mathrm{i}$ – момент количества движения тела i.
- $\mathbf{M}_\mathrm{i}$ – главный момент, действующий на тело i.
- $\mathbf{X}_\alpha$ – сила реакции в шарнире α.
- $\mathbf{Y}_\alpha$ – шарнирный момент в шарнире α.

$$\dot{\mathbf{L}}_\mathrm{i} = \mathbf{M}_\mathrm{i} + \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{S}_{\mathrm{i}\alpha}(\mathbf{c}_{\mathrm{i}\alpha} \times \mathbf{X}^\mathrm{c}_\alpha + \mathbf{Y}_\alpha), \quad \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}.$$

Система уравнений движения

$$
\begin{cases}
\mathrm{m_i}\ddot{\mathbf{r}}_\mathrm{i} = \mathbf{F}_\mathrm{i} + \displaystyle\sum_{\mathrm{a}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{S_{ia}}\mathbf{X}_\mathrm{a}^\mathrm{c}, \\
\dot{\mathbf{L}}_\mathrm{i} = \mathbf{M}_\mathrm{i} + \displaystyle\sum_{\mathrm{a}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{S_{ia}}(\mathbf{c}_\mathrm{ia} \times \mathbf{X}_\mathrm{a}^\mathrm{c} + \mathbf{Y}_\mathrm{a}).
\end{cases}
\qquad \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n} \tag{3}
$$

Уравнения движения центра масс тела

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia} \mathbf{X}_a^c, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4}$$

объединяются в одно матричное уравнение

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{S}\mathbf{X}^c, \tag{5}$$

где столбцы векторов

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n \end{bmatrix}, \mathbf{X}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^c \\ \mathbf{X}_2^c \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^c \end{bmatrix} \tag{6}$$

$\mathbf{m} = \mathrm{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$ – диагональная матрица масс.

Уравнения движения вокруг центра масс

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{i}} = \mathbf{M}_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{a}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{S}_{\mathrm{ia}}(\mathbf{c}_{\mathrm{ia}} \times \mathbf{X}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{a}} + \mathbf{Y}_{\mathrm{a}}), \quad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}, \tag{7}$$

объединяются в одно матричное уравнение

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + \mathbf{C} \times \mathbf{X}^{\mathrm{c}} + \mathbf{S}\mathbf{Y} \tag{8}$$

где

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}, \ \mathbf{X}^{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{\mathrm{c}}_1 \\ \mathbf{X}^{\mathrm{c}}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}, \ \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}, \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{\mathrm{n}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$\mathbf{C}$ – $(\mathrm{n} \times \mathrm{n})$ матрица векторов с элементами: $\mathbf{C}_{\mathrm{ia}} = \mathrm{S}_{\mathrm{ia}}\mathbf{c}_{\mathrm{ia}}$,
$\mathrm{i}, \mathrm{a} = 1, \dots, \mathrm{n}$.

Система матричных уравнений

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{S}\mathbf{X}^c, \tag{10}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + \mathbf{C} \times \mathbf{X}^c + \mathbf{S}\mathbf{Y}. \tag{11}$$

Умножив (10) слева на $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$, можно выразить силы реакции $\mathbf{X}^c$

$$\mathbf{X}^c = \mathbf{T}(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}). \tag{12}$$

и исключить из (11) силу реакции:

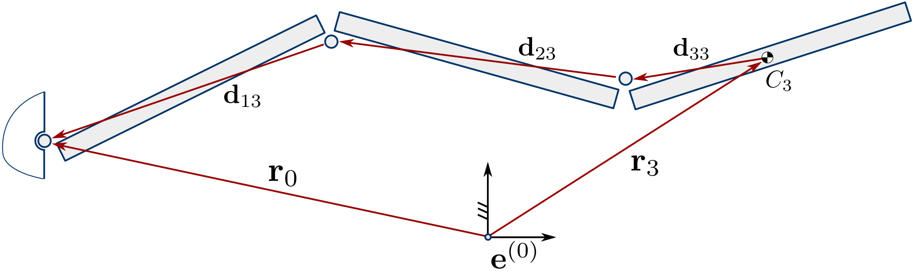
$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{C}\mathbf{T} \times (\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{S}\mathbf{Y}}$$

Кинематика относительного движения

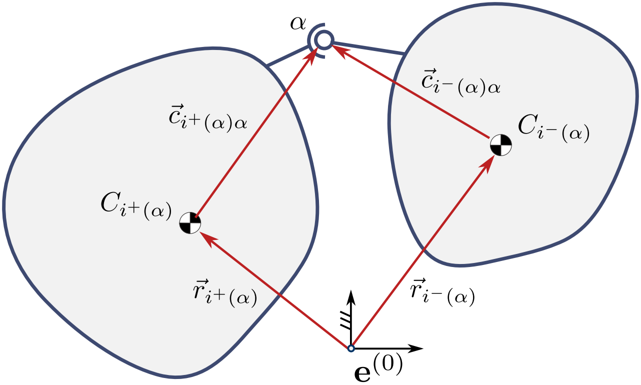
Кинематика относительного движения тел

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{CT} \times (\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}}$$

Между $\ddot{\mathbf{r}}_\mathrm{i}$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{i}$, которые входят в $\dot{\mathbf{L}}$, есть связь, определяемая кинематикой относительного движения тел в системе.



Кинематика относительного движения тел



$$(\mathbf{r}_{\mathrm{i}^+(\alpha)} + \mathbf{c}_{\mathrm{i}^+(\alpha)\alpha}) - (\mathbf{r}_{\mathrm{i}^-(\alpha)} + \mathbf{c}_{\mathrm{i}^-(\alpha)\alpha}) = 0,\ \alpha = 1, \ldots, \mathrm{n}. \tag{13}$$

Кинематика относительного движения тел

$$(\mathbf{r}_{\mathrm{i}^{+}(\alpha)\alpha} + \mathbf{c}_{\mathrm{i}^{+}(\alpha)\alpha}) - (\mathbf{r}_{\mathrm{i}^{-}(\alpha)} + \mathbf{c}_{\mathrm{i}^{-}(\alpha)\alpha}) = 0,\ \mathrm{a} = 1, \ldots, \mathrm{n}, \tag{14}$$

или, используя матрицу S:

$$\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{S}_{\mathrm{i}\alpha}(\mathbf{r}_{\mathrm{i}} + \mathbf{c}_{\mathrm{i}\alpha}) = 0,\ \mathrm{a} = 1, \ldots, \mathrm{n}. \tag{15}$$

Кинематика относительного движения тел

Движение тела 0 известно: $\mathbf{r}_0(\mathrm{t}), \boldsymbol{\omega}_0(\mathrm{t})$.

Базис, связанный с телом 0, удобней поместить в первую шарнирную точку, соединяющую тело 0 с первым телом системы.

В этом случае $\mathbf{c}_{0\alpha} = 0$ для всех $\alpha = 1, \dots, \mathrm{n}$.

$$\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{S}_{\mathrm{i}\alpha}(\mathbf{r}_\mathrm{i} + \mathbf{c}_{\mathrm{i}\alpha}) = 0, \ \alpha = 1, \dots, \mathrm{n}. \tag{16}$$

$$\mathrm{S}_{0\alpha}\mathbf{r}_0 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{S}_{\mathrm{i}\alpha}\mathbf{r}_\mathrm{i} + \mathbf{C}_{\mathrm{i}\alpha}) = 0, \ \alpha = 1, \dots, \mathrm{n}. \tag{17}$$

Векторы $\mathrm{r_i}$

$$\mathrm{S}_{0\alpha}\mathbf{r}_0+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{S}_{\mathrm{i}\alpha}\mathbf{r}_\mathrm{i}+\mathbf{C}_{\mathrm{i}\alpha})=0,\ \alpha=1,\ldots,\mathrm{n}, \tag{18}$$

Матричная форма

$$\mathbf{r}_0\mathbf{S}_0^{\mathrm{T}}+\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_\mathrm{n}=\mathbf{0}. \tag{19}$$

Умножив (19) слева на $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$, можно выразить столбец радиус-векторов тел:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0\mathbf{1}_\mathrm{n}-(\mathbf{CT})^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_\mathrm{n}. \tag{20}$$

$\mathbf{CT}$ – матрица с элементами $\mathbf{d}_{\mathrm{ij}}$:

$$\boxed{\mathbf{d}_{\mathrm{ij}}=(\mathbf{CT})_{\mathrm{ij}}=\sum_{\mathrm{a}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{T}_{\mathrm{aj}}\mathrm{S}_{\mathrm{ia}}\mathbf{c}_{\mathrm{ia}},\ \mathrm{i},\mathrm{j}=1,\ldots,\mathrm{n}} \tag{21}$$

Векторы d_{ij}

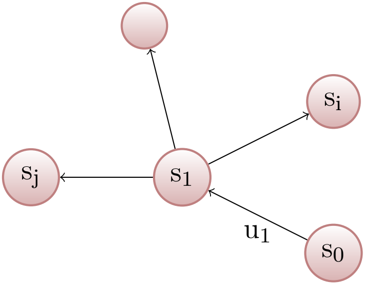
$$\mathbf{d}_{\mathrm{ji}} = \sum_{\mathrm{a}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{T}_{\mathrm{ai}}\mathrm{S}_{\mathrm{ja}}\mathbf{c}_{\mathrm{ja}}, \ \mathrm{i}, \mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{n}. \tag{22}$$

Произведения $\mathrm{T}_{\mathrm{ai}}\mathrm{S}_{\mathrm{ja}}$ отличны от нуля

- для дуг u_{a}, которые принадлежат пути между s_0 и s_{i} ($\mathrm{T}_{\mathrm{ai}} \neq 0$)
- и которые инцидентны s_{j} ($\mathrm{S}_{\mathrm{ja}} \neq 0$).

Три случая взаимного положения вершин

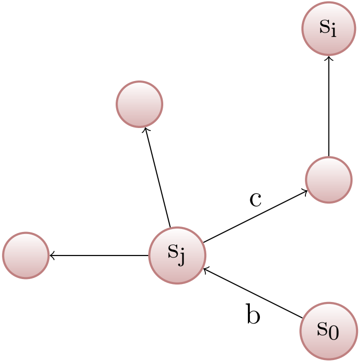
$$\mathbf{d}_{ji} = \sum_{a=1}^{n} T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja}, \ i, j = 1, \ldots, n. \qquad (23)$$



Если s_j не лежит на пути от тела 0 к телу s_i - в этом случае ни одна из дуг не вносит вклад в сумму (25) и, следовательно, $\mathbf{d}_{ij} = 0$;

Три случая взаимного положения вершин

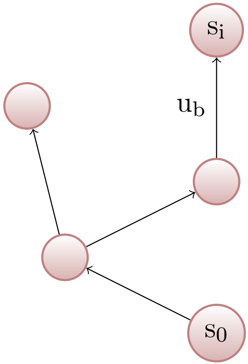
$$\mathbf{d}_{ji} = \sum_{a=1}^{n} T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja}, \; i, j = 1, \ldots, n. \tag{24}$$



Если s_j лежит на пути от тела 0 к телу s_i - в этом случае вклад в сумму (25) вносят две дуги, обозначим их индексами b и c, и следовательно $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{c}_{jb} - \mathbf{c}_{jc}$, поскольку $T_{bi} S_{jb} = +1$, $T_{ci} S_{jc} = -1$, где b - индекс дуги u_b, предшествующей вершине s_i.

Векторы d_{ij}

$$\mathbf{d}_{ji} = \sum_{a=1}^{n} T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja}, \; i, j = 1, \ldots, n. \tag{25}$$



Если s_j и s_i - одно тело, в этом случае только дуга u_b предшествующая s_i:

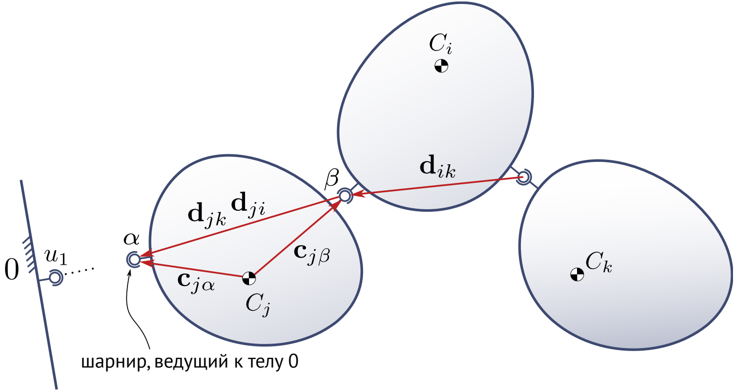
$$S_{ib} = \pm 1,$$

дает вклад в сумму и, следовательно

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{c}_{ib}.$$

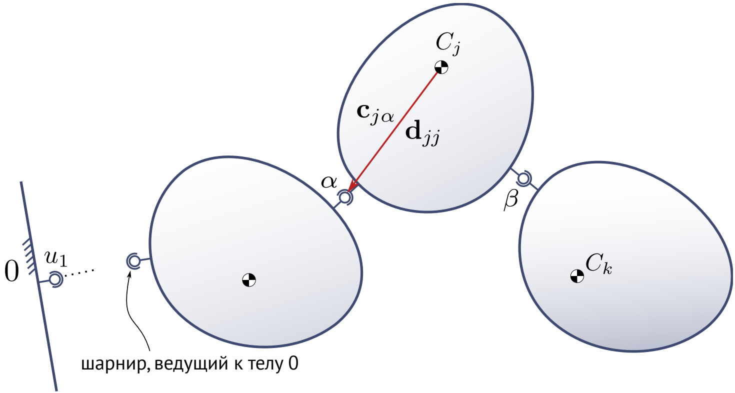
Определение вектора $\mathrm{d_{ji}}$

Если $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$, то вектор $\mathbf{d}_{\mathrm{ji}}$ выходит из шарнирной точки, расположенной на теле j и ведущей к телу i и заканчивается в шарнирной точке тела j, ведущей к телу 0.



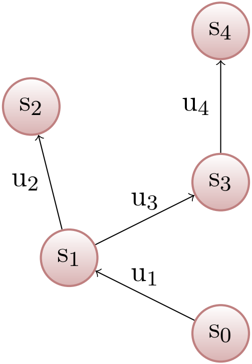
Определение вектора $\mathrm{d_{ji}}$

Если $\mathrm{i = j}$, то вектор $\mathbf{d}_{\mathrm{jj}}$ выходит из центра масс тела j и заканчивается в шарнирной точке тела j, ведущей к телу 0.



Определение вектора $\mathrm{d_{ji}}$

$$\forall\, \mathrm{i}, \mathrm{j} : \mathrm{s_i} < \mathrm{s_j} \;\vee\; (\mathrm{s_i} \nleq \mathrm{s_j} \;\wedge\; \mathrm{s_j} \nleq \mathrm{s_i}) \to \mathbf{d}_{\mathrm{ij}} = 0$$



$$\mathbf{d}_{21} = \mathbf{d}_{23} = \mathbf{d}_{24} = \mathbf{d}_{42} = \mathbf{d}_{43} = \mathbf{d}_{41} = \mathbf{d}_{31} = \mathbf{d}_{32} = 0$$

Векторы $\mathbf{g}_{\mathrm{ij}}$

Подставим в уравнение движения

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{CT} \times (\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}}$$

вторую производную по времени от $\mathbf{r}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{1}_{\mathrm{n}} - (\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^{\mathrm{T}} \mathbf{1}_{\mathrm{n}}.$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} - \mathbf{CT} \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^{\mathrm{T}} \mathbf{1}_{\mathrm{n}} - (\mathbf{CT}) \times (\ddot{\mathbf{r}}_0 \mathbf{m} \mathbf{1}_{\mathrm{n}} - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}} \tag{26}$$

$\mathbf{g}_{\mathrm{ij}}$ – элементы матрицы $(\mathbf{CT}) \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{g}_{\mathrm{ij}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}_{\mathrm{k}} \mathbf{d}_{\mathrm{ik}} \times \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{jk}}, \ \mathrm{i}, \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n}. \tag{27}$$

Векторы g_{ij}

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{jk},\ i, j = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Четыре случая сочетаний индексов i и j:

1. $i = j$;
2. $s_i < s_j \Rightarrow$ для $\forall s_k : s_i < s_k,\ \mathbf{d}_{ik} = \mathbf{d}_{ij}$;
3. $s_j < s_i \Rightarrow$ для $\forall s_k : s_j < s_k,\ \mathbf{d}_{jk} = \mathbf{d}_{ji}$;
4. все прочие случаи.

$\mathbf{g}_{ij}$ при $i = j$

При $i = j$ выражение

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{jk}, \ i, j = 1, \ldots, n, \tag{29}$$

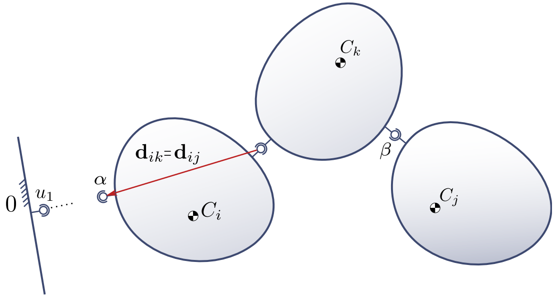
принимает следующий вид:

$$\mathbf{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}, \ i, j = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

$\mathbf{g}_{\mathrm{ij}}$ при $\mathrm{s_i} < \mathrm{s_j}$

При $\mathrm{s_i} < \mathrm{s_j}$

$$\forall \mathrm{s_k} : \mathrm{s_i} < \mathrm{s_k},\ \mathbf{d}_{\mathrm{ik}} = \mathbf{d}_{\mathrm{ij}}, \tag{31}$$



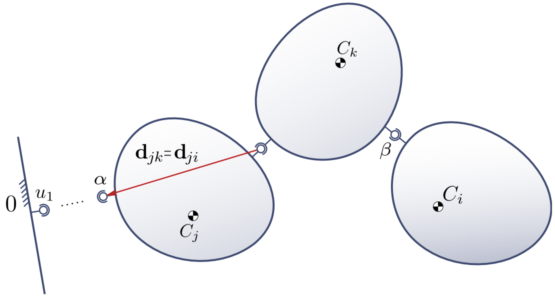
следовательно

$$\mathbf{g}_{\mathrm{ij}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m_k} \mathbf{d}_{\mathrm{ik}} \times \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{jk}} = \mathbf{d}_{\mathrm{ij}} \times \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m_k} \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{jk}},\ \mathrm{i,j} = 1, \ldots, \mathrm{n}. \tag{32}$$

$\mathbf{g}_{\mathrm{ij}}$ при $\mathrm{s_j} < \mathrm{s_i}$

При $\mathrm{s_j} < \mathrm{s_i}$

$$\forall \mathrm{s_k} : \mathrm{s_j} < \mathrm{s_k},\ \mathbf{d}_{\mathrm{jk}} = \mathbf{d}_{\mathrm{ji}}, \tag{33}$$



следовательно

$$\mathbf{g}_{\mathrm{ij}} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{m_k} \mathbf{d}_{\mathrm{ik}} \times \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{jk}} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{m_k} \mathbf{d}_{\mathrm{ik}} \times \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{ji}},\ \mathrm{i,j} = 1, \ldots, \mathrm{n}. \tag{34}$$

$\mathbf{g}_{\mathrm{ij}}$ **при** $\mathrm{s_j} \not\leq \mathrm{s_i}$ **и** $\mathrm{s_i} \not\leq \mathrm{s_j}$

При $\mathrm{s_j} \not\leq \mathrm{s_i}$ и $\mathrm{s_i} \not\leq \mathrm{s_j}$

$$\forall \mathrm{s_k} : \text{ или } \mathbf{d}_{\mathrm{jk}} = 0 \text{ или } \mathbf{d}_{\mathrm{ji}} = 0, \tag{35}$$

следовательно

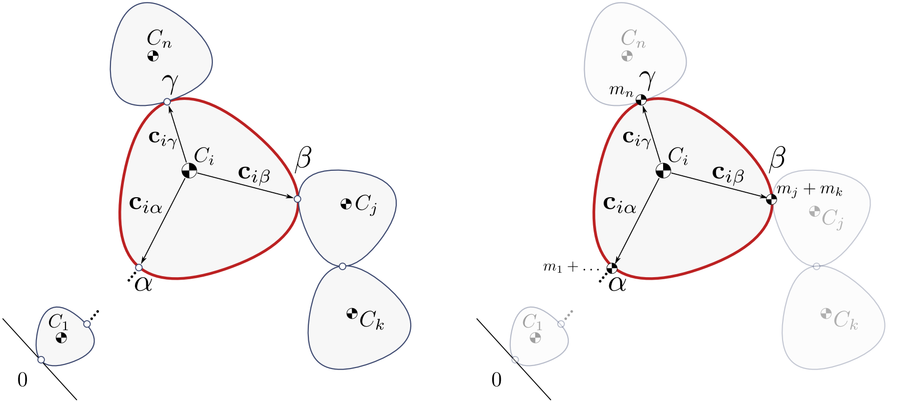
$$\mathbf{g}_{\mathrm{ij}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m_k} \mathbf{d}_{\mathrm{ik}} \times \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{jk}} = 0. \tag{36}$$

Векторы g_{ij}

$$\mathbf{g}_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}_{\mathrm{k}} \mathbf{d}_{\mathrm{ik}} \times \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{ik}}, & \mathrm{s}_{\mathrm{i}} = \mathrm{s}_{\mathrm{j}} \\ \mathbf{d}_{\mathrm{ij}} \times \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}_{\mathrm{k}} \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{jk}}, & \mathrm{s}_{\mathrm{i}} < \mathrm{s}_{\mathrm{j}} \\ \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}_{\mathrm{k}} \mathbf{d}_{\mathrm{ik}} \times \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{ji}}, & \mathrm{s}_{\mathrm{j}} < \mathrm{s}_{\mathrm{i}} \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{37}$$

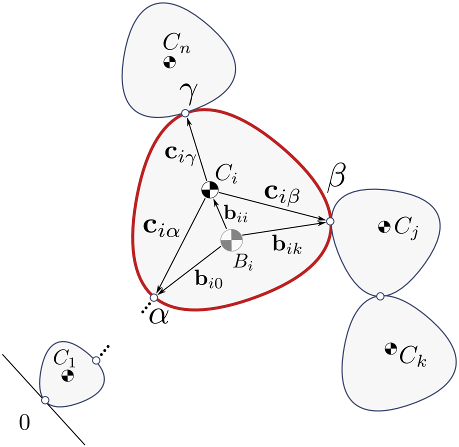
Дополненное тело. Барицентр.

Дополненное тело



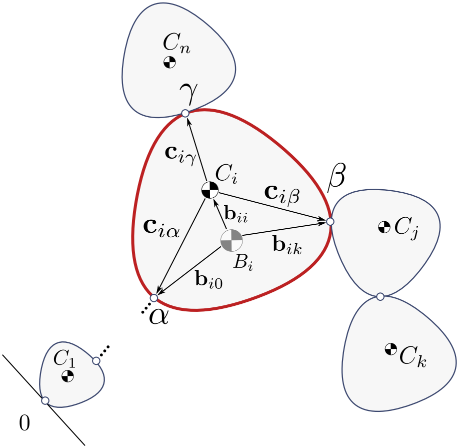
Тело i с дополнительными сосредоточенными массами в шарнирных точках. В каждую шарнирную точку тела i помещается масса всех тел, прямо или косвенно закрепленных при помощи этого шарнира.

Барицентр



- Для дополненного тела может быть определено положение центра масс $\mathrm{B_i}$.
- Барицентр тела i – центр масс дополненного тела $\mathrm{B_i}$.

Векторы $\mathrm{b_{ij}}$



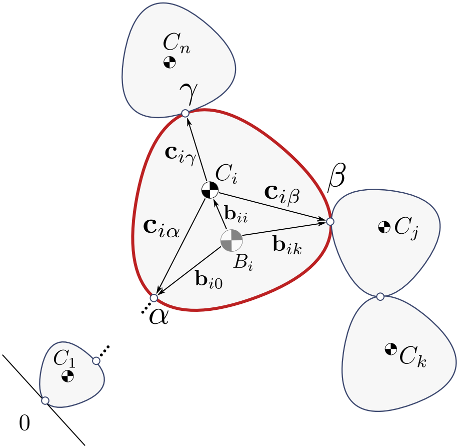
- Положение барицентра определяется векторами $\mathbf{b}_{\mathrm{ij}}$.
- Векторы $\mathbf{b}_{\mathrm{ij}}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathbf{b}_{\mathrm{ij}} \mathrm{m}_{\mathrm{j}} = 0. \tag{38}$$

- Для системы, изображённой на рисунке

$$\mathbf{b}_{\mathrm{ij}} = \mathbf{b}_{\mathrm{ik}} \tag{39}$$

Векторы $\mathrm{b_{ij}}$ и $\mathrm{d_{ij}}$



Векторы $\mathbf{b}_{\mathrm{ij}}$ и $\mathbf{d}_{\mathrm{ij}}$ связаны соотношениями:

$$\mathbf{d}_{\mathrm{ij}} = \mathbf{b}_{\mathrm{i0}} - \mathbf{b}_{\mathrm{ij}}. \quad (40)$$

$$\mathbf{d}_{\mathrm{ik}} = \mathbf{b}_{\mathrm{i0}} - \mathbf{b}_{\mathrm{ik}}. \quad (41)$$

Упрощение $\mathbf{g}_{ij}$

Используя

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{b}_{i0} - \mathbf{b}_{ij},\ i, j = 1, \dots, n.$$

$$\mathbf{g}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}, \\ \mathbf{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{d}}_{jk}, \\ \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ji}, \\ 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik},\ s_i = s_j \\ M\mathbf{d}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{j0},\ s_i < s_j \\ M\mathbf{b}_{i0} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ji},\ s_j < s_i \\ 0,\ \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{42}$$

Пример преобразования для случая $s_i < s_j$:

$$\mathbf{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{d}}_{jk} \rightarrow \mathbf{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{b}}_{j0} - \mathbf{d}_{ij} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\mathbf{b}}_{jk} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{d}_{ij} \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k}_{M} \ddot{\mathbf{b}}_{j0} - \mathbf{d}_{ij} \times \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{b}_{jk}}_{0} \rightarrow M\mathbf{d}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{j0}$$

Подставив выражения (42) для $\mathbf{g}_{\mathrm{ij}}$ в уравнение (26)

$$\dot{\mathbf{L}} - \underbrace{\mathbf{CT} \times \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{C}}\mathbf{T})^{\mathrm{T}}}_{[\mathbf{g}]_{\mathrm{ij}}}\ \mathbf{1}_{\mathrm{n}} - (\mathbf{CT}) \times (\ddot{\mathbf{r}}_0\mathbf{m}\mathbf{1}_{\mathrm{n}} - \mathbf{F}) = \mathbf{M} + \mathbf{SY}, \qquad (43)$$

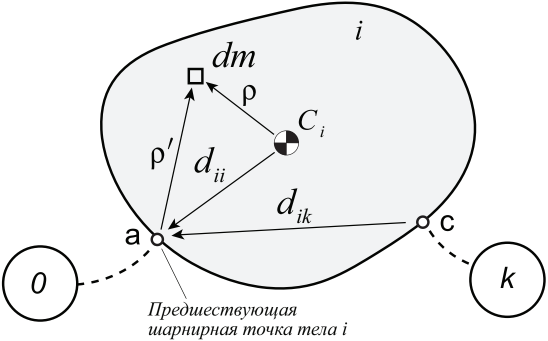
получим следующую систему уравнений:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}_{\mathrm{k}}\mathbf{d}_{\mathrm{ik}} \times \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{ik}} + \mathrm{M}\left(\sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_{\mathrm{i}}<\mathrm{s}_{\mathrm{j}}} \mathbf{d}_{\mathrm{ij}} \times \ddot{\mathbf{b}}_{\mathrm{j}0} + \mathbf{b}_{\mathrm{i}0} \times \sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_{\mathrm{j}}<\mathrm{s}_{\mathrm{i}}} \ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{ji}}\right) -$$
$$- \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathbf{d}_{\mathrm{ij}} \times (\mathrm{m}_{\mathrm{j}}\ddot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{F}_{\mathrm{j}}) = \mathbf{M}_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{a}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{S}_{\mathrm{ia}}\mathbf{Y}_{\mathrm{a}},\ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}, \qquad (44)$$

Далее необходимо выразить через угловые скорости и ускорения тела векторы $\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{i}}$, $\ddot{\mathbf{b}}_{\mathrm{j}0}$, $\ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{ji}}$.

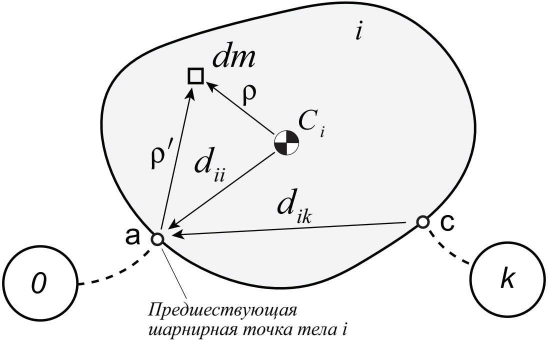
Момент количества движения тела

Момент количества движения тела i



$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} - \mathbf{d}_{\mathrm{ii}}$$

$$\mathbf{L}_{\mathrm{i}}' = \int_{\mathrm{m}} \boldsymbol{\rho}' \times \dot{\boldsymbol{\rho}}' \mathrm{dm} \rightarrow \mathbf{L}_{\mathrm{i}}' = \int_{\mathrm{m}} (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{d}_{\mathrm{ii}}) \times (\dot{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\mathbf{d}}_{\mathrm{ii}}) \mathrm{dm}$$



Производная $\mathbf{L}_\mathrm{i}'$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_\mathrm{i}'}{\mathrm{dt}} = \int_{\mathrm{m_i}} (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{d}_\mathrm{ii}) \times (\ddot{\boldsymbol{\rho}} - \ddot{\mathbf{d}}_\mathrm{ii})\mathrm{dm} = \int_{\mathrm{m_i}} \boldsymbol{\rho} \times \ddot{\boldsymbol{\rho}}. \qquad (45)$$

Учитывая, что $\int_\mathrm{m} \rho \mathrm{dm} = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_\mathrm{i}'}{\mathrm{dt}} = \dot{\mathbf{L}}_\mathrm{i} + \mathrm{m_i}\mathbf{d}_\mathrm{ii} \times \ddot{\mathbf{d}}_\mathrm{ii}. \qquad (46)$$

Если выражению

$$\frac{d\mathbf{L}_i'}{dt} = \dot{\mathbf{L}}_i + m_i \mathbf{d}_{ii} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ii}.$$

добавить сумму $\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}$, то получатся два первых члена в уравнении

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_i + \sum_{j=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}} + M\left(\sum_{j:s_i<s_j} \mathbf{d}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \mathbf{b}_{i0} \times \sum_{j:s_i<s_j} \ddot{\mathbf{d}}_{ji}\right) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_{ij} \times (m_j \ddot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{F}_j) = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia} \mathbf{Y}_a, \; i = 1, \ldots, n,$$

$\dot{\mathbf{L}}_i + \sum_{j=1}^{n} m_k \mathbf{d}_{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_{ik}$ – абсолютная производная по времени момента количества абсолютного движения дополненного тела i относительно его предшествующей шарнирной точки.

Тензор инерции дополненного тела

Тензор инерции дополненного тела

- Пусть $\mathbf{K}_\mathrm{i}$ - тензор инерции дополненного тела i по отношению к его предшествующей шарнирной точке.
- Связь между $\mathbf{K}_\mathrm{i}$ и центральным тензором инерции тела $\mathbf{J}_\mathrm{i}$:

$$\mathbf{K}_\mathrm{i} = \mathbf{J}_\mathrm{i} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}_\mathrm{k}(\mathbf{d}_\mathrm{ik}^2 \mathbf{E} - \mathbf{d}_\mathrm{ik}\mathbf{d}_\mathrm{ik}),\ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}. \tag{47}$$

- Тензор инерции $\mathbf{K}_\mathrm{i}$ отличается от тензора инерции тела $\mathbf{J}_\mathrm{i}$ учётом сосредоточенных масс в шарнирных точках.

$$\mathbf{K}_\mathrm{i} = \mathbf{J}_\mathrm{i} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}_\mathrm{k}(\mathbf{d}_\mathrm{ik}^2 \mathbf{E} - \mathbf{d}_\mathrm{ik}\mathbf{d}_\mathrm{ik}),\ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}. \tag{48}$$

Два первых члена уравнения движения можно выразить, используя угловую скорость вращения тела $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{i}$:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_\mathrm{i} + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}_\mathrm{k} \mathbf{d}_\mathrm{ik} \times \ddot{\mathbf{d}}_\mathrm{ik}} = \mathbf{K}_\mathrm{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{i} + \boldsymbol{\omega}_\mathrm{i} \times \mathbf{K}_\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}_\mathrm{i}. \tag{49}$$

Уравнения движения

В выражении

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_{ij} \times (m_j \ddot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{F}_j) = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{b}_{i0} - \mathbf{b}_{ij}) \times \ddot{\mathbf{r}}_0 m_j + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_{ij} \times \mathbf{F}_j =$$
$$= \mathbf{b}_{i0} \times \ddot{\mathbf{r}}_0 M - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_{ij} \times (m_j \ddot{\mathbf{r}}_0 - \mathbf{F}_j) \quad (50)$$

множитель $\mathbf{d}_{ij}$ отличен от нуля только для тех значений j, которые удовлетворяют соотношению $s_i \leq s_j$. Учитывая это, преобразуем уравнения движения к виду

$$\mathbf{K}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{K}_i \boldsymbol{\omega}_i + M \left[\sum_{j:s_i<s_j} \mathbf{d}_{ij} \times \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \mathbf{b}_{i0} \times (-\ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{j:s_j<s_i} \ddot{\mathbf{d}}_{ji}) \right] +$$
$$+ \sum_{j:s_i<s_j} \mathbf{d}_{ij} \times \mathbf{F}_j = \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia} \mathbf{Y}_a, \; i = 1, \ldots, n. \quad (51)$$

Производные векторов $\mathrm{b}_{\mathrm{j}0}$ и d_{ji}

Векторы $\mathbf{b}_{\mathrm{j}0}$ и $\mathbf{d}_{\mathrm{ji}}$ связаны с телом j, поэтому их производные определяются движением тела j:

$$\ddot{\mathbf{b}}_{\mathrm{j}0} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{j}} \times \mathbf{b}_{\mathrm{j}0} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{j}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{j}} \times \mathbf{b}_{\mathrm{j}0}),\ \mathrm{i}, \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n}, \tag{52}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{\mathrm{ji}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{j}} \times \mathbf{d}_{\mathrm{ji}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{j}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{j}} \times \mathbf{d}_{\mathrm{ji}}),\ \mathrm{i}, \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n}. \tag{53}$$

Уравнения движения

После подстановки $\ddot{\mathbf{b}}_{j0}$ и $\ddot{\mathbf{d}}_{ji}$

$$\mathbf{K}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + M\left[\sum_{j:s_i<s_j}\mathbf{d}_{ij}\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}_j\times\mathbf{b}_{j0}) + \mathbf{b}_{i0}\times\sum_{j:s_j<s_i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_j\times\mathbf{d}_{ji}\right] =$$
$$= \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}\mathbf{Y}_a,\ i = 1,\ldots,n. \quad (54)$$

где

$$\mathbf{M}'_i = -\boldsymbol{\omega}_i\times\mathbf{K}_i\boldsymbol{\omega}_i - M\left[\sum_{j:s_i<s_j}\mathbf{d}_{ij}\times(\boldsymbol{\omega}_j\times(\boldsymbol{\omega}_j\times\mathbf{b}_{j0})) - \mathbf{b}_{i0}\times\ddot{\mathbf{r}}_0 + \right.$$
$$\left. + \mathbf{b}_{i0}\times\sum_{j:s_j<s_i}\boldsymbol{\omega}_j\times(\boldsymbol{\omega}_j\times\mathbf{d}_{ji})\right] - \sum_{j:s_i\le s_j}\mathbf{d}_{ij}\times\mathbf{F}_j,\ i = 1,\ldots,n. \quad (55)$$

Тензорная запись векторного произведения

Двойные векторные произведения выражаются через тензорные произведения следующим образом:

$$\mathbf{d}_{\mathrm{ij}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{j}} \times \mathbf{b}_{\mathrm{j0}}) = (\mathbf{b}_{\mathrm{j0}} \cdot \mathbf{d}_{\mathrm{ij}}\mathbf{E} - \mathbf{b}_{\mathrm{j0}}\mathbf{d}_{\mathrm{ij}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{j}}. \tag{56}$$

где

- $\mathbf{b}_{\mathrm{j0}} \cdot \mathbf{d}_{\mathrm{ij}}$ – скалярное произведение в координатной форме, записываемое в виде

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_x} & \mathrm{a_y} & \mathrm{a_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{b_x} \\ \mathrm{b_y} \\ \mathrm{b_z} \end{bmatrix} = \mathrm{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}.$$

- $\mathbf{b}_{\mathrm{j0}}\mathbf{d}_{\mathrm{ij}}$ – диадное произведение в координатной форме, записываемое в виде:

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_x} \\ \mathrm{a_y} \\ \mathrm{a_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{b_x} & \mathrm{b_y} & \mathrm{b_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_x b_x} & \mathrm{a_x b_y} & \mathrm{a_x b_z} \\ \mathrm{a_y b_x} & \mathrm{a_y b_y} & \mathrm{a_y b_z} \\ \mathrm{a_z b_x} & \mathrm{a_z b_y} & \mathrm{a_z b_z} \end{bmatrix}.$$

Тензоры K_{ij}

Уравнения

$$\mathbf{K}_{\mathrm{i}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{i}} + \mathrm{M}\left[\sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_{\mathrm{i}}<\mathrm{s}_{\mathrm{j}}} \mathbf{d}_{\mathrm{ij}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{j}} \times \mathbf{b}_{\mathrm{j}0}) + \mathbf{b}_{\mathrm{i}0} \times \sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_{\mathrm{j}}<\mathrm{s}_{\mathrm{i}}} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{j}} \times \mathbf{d}_{\mathrm{ji}}\right] =$$
$$= \mathbf{M}'_{\mathrm{i}} + \mathbf{M}_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{a}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{S}_{\mathrm{ia}}\mathbf{Y}_{\mathrm{a}}, \ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n} \quad (57)$$

после замены векторных произведений на тензорные произведения принимают вид

$$\mathbf{K}_{\mathrm{i}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{i}} + \mathrm{M}\left[\sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_{\mathrm{i}}<\mathrm{s}_{\mathrm{j}}} (\mathbf{b}_{\mathrm{j}0} \cdot \mathbf{d}_{\mathrm{ij}}\mathbf{E} - \mathbf{b}_{\mathrm{j}0}\mathbf{d}_{\mathrm{ij}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{j}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_{\mathrm{j}}<\mathrm{s}_{\mathrm{i}}} (\mathbf{d}_{\mathrm{ji}} \cdot \mathbf{b}_{\mathrm{i}0}\mathbf{E} - \mathbf{d}_{\mathrm{ji}}\mathbf{b}_{\mathrm{i}0}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{j}}\right] = \mathbf{M}'_{\mathrm{i}} + \mathbf{M}_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{a}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{S}_{\mathrm{ia}}\mathbf{Y}_{\mathrm{a}}, \ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}.$$

Тензоры K_{ij}

Первые три слагаемых уравнения

$$\mathbf{K}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + M\left[\sum_{j:s_i<s_j}(\mathbf{b}_{j0}\cdot\mathbf{d}_{ij}\mathbf{E}-\mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij})\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \right.$$
$$\left. + \sum_{j:s_j<s_i}(\mathbf{d}_{ji}\cdot\mathbf{b}_{i0}\mathbf{E}-\mathbf{d}_{ji}\mathbf{b}_{i0})\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_j\right] = \mathbf{M}_i' + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}\mathbf{Y}_a,\ i = 1,\dots,n.$$

объединяются при помощи тензоров $\mathbf{K}_{ij}$:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i, & i = j, \\ M(\mathbf{b}_{j0}\cdot\mathbf{d}_{ij}\mathbf{E}-\mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij}), & s_i < s_j, \\ M(\mathbf{d}_{ji}\cdot\mathbf{b}_{i0}\mathbf{E}-\mathbf{d}_{ji}\mathbf{b}_{i0}), & s_j < s_i, \\ \mathbf{0}, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{58}$$

Тензоры K_{ij}

При помощи тензоров $\mathbf{K}_{\mathrm{ij}}$ уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathbf{K}_{\mathrm{ij}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{j}} = \mathbf{M}'_{\mathrm{i}} + \mathbf{M}_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{a}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{S}_{\mathrm{ia}} \mathbf{Y}_{\mathrm{a}}, \ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}. \tag{59}$$

Уравнения движения

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_{ij}\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}\mathbf{Y}_a,\ i = 1,\dots,n} \tag{60}$$

где

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i, & i = j, \\ M(\mathbf{b}_{j0}\cdot\mathbf{d}_{ij}\mathbf{E} - \mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij}), & s_i < s_j, \\ M(\mathbf{d}_{ji}\cdot\mathbf{b}_{i0}\mathbf{E} - \mathbf{d}_{ji}\mathbf{b}_{i0}), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{61}$$

Вектор M'_i

$$\mathbf{M}'_\mathrm{i} = -\boldsymbol{\omega}_\mathrm{i} \times \mathbf{K}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{\omega}_\mathrm{i} - \mathrm{M}\left[\sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_\mathrm{i}<\mathrm{s}_\mathrm{j}} \mathbf{d}_{\mathrm{ij}} \times (\boldsymbol{\omega}_\mathrm{j} \times (\boldsymbol{\omega}_\mathrm{j} \times \mathbf{b}_{\mathrm{j}0})) + \right.$$
$$\left. + \mathbf{b}_{\mathrm{i}0} \times \left(\sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_\mathrm{j}<\mathrm{s}_\mathrm{i}} \boldsymbol{\omega}_\mathrm{j} \times (\boldsymbol{\omega}_\mathrm{j} \times \mathbf{d}_{\mathrm{ji}}) - \ddot{\mathbf{r}}_0\right)\right] - \sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_\mathrm{i}\leq\mathrm{s}_\mathrm{j}} \mathbf{d}_{\mathrm{ij}} \times \mathbf{F}_\mathrm{j},\ \mathrm{i} = 1, \ldots \mathrm{n}.$$

Координатная форма уравнений

Преобразование координат

- Выполнение операций необходимо проводить над координатными столбцами в одной системе координат.
- Необходимо использовать матрицы ортогональных преобразований:
  $\mathbf{A}^{\mathrm{i}}$ – матрица преобразования координат из базиса i в базис 0
  $\mathbf{A}^{\mathrm{ij}}$ – матрица преобразования координат из базиса j в базис i
- Матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{i}}$ определяются из кинематических уравнений, интегрируемых совместно с динамическими уравнениями.

Тензоры $\mathrm{K_{ij}}$ в базисе 0

$$\mathbf{K}_{\mathrm{ij}}^{(0)} = \begin{cases} \mathbf{A}^{\mathrm{i}}\mathbf{K}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{i})}\mathbf{A}^{\mathrm{iT}}, & \mathrm{i} = \mathrm{j}, \\ \mathrm{M}\left[(\mathbf{A}^{\mathrm{ij}}\mathbf{b}_{\mathrm{j0}}^{(\mathrm{j})})^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_{\mathrm{ij}}^{(\mathrm{i})}\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\mathrm{j}}\mathbf{b}_{\mathrm{j0}}^{(\mathrm{j})}(\mathbf{A}^{\mathrm{i}}\mathbf{d}_{\mathrm{ij}}^{(\mathrm{i})})^{\mathrm{T}}\right], & \mathrm{s_i} < \mathrm{s_j}, \\ \mathrm{M}\left[(\mathbf{A}^{\mathrm{ij}}\mathbf{d}_{\mathrm{ji}}^{(\mathrm{j})})^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_{\mathrm{i0}}^{(\mathrm{i})}\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\mathrm{j}}\mathbf{d}_{\mathrm{ji}}^{(\mathrm{j})}(\mathbf{A}^{\mathrm{i}}\mathbf{b}_{\mathrm{i0}}^{(\mathrm{i})})^{\mathrm{T}}\right], & \mathrm{s_j} < \mathrm{s_i}, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{i})} = \mathbf{J}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{i})} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m_k}(|\mathrm{d_{ik}}|^2\mathbf{E} - \mathbf{d}_{\mathrm{ik}}^{(\mathrm{i})}\mathbf{d}_{\mathrm{ik}}^{(\mathrm{i})\mathrm{T}}),\ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}. \tag{62}$$

Координатная форма вектора M'_{i}

$$\mathbf{M}'^{(\mathrm{i})}_{\mathrm{i}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(\mathrm{i})}_{\mathrm{i}}\mathbf{K}^{(\mathrm{i})}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{\omega}^{(\mathrm{i})}_{\mathrm{i}} - \mathrm{M}\left[\sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_\mathrm{i}<\mathrm{s}_\mathrm{j}}\tilde{\mathbf{d}}^{(\mathrm{i})}_{\mathrm{ij}}\mathbf{A}^{\mathrm{ij}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(\mathrm{j})}_{\mathrm{j}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(\mathrm{j})}_{\mathrm{j}}\mathbf{b}^{(\mathrm{j})}_{\mathrm{j0}} + \right.$$
$$\left. +\tilde{\mathbf{b}}^{(\mathrm{i})}_{\mathrm{i0}}\left(\sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_\mathrm{j}<\mathrm{s}_\mathrm{i}}\mathbf{A}^{\mathrm{ij}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(\mathrm{j})}_{\mathrm{j}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(\mathrm{j})}_{\mathrm{j}}\mathbf{d}^{(\mathrm{j})}_{\mathrm{ji}} - \mathbf{A}^{\mathrm{iT}}\ddot{\mathbf{r}}^{(0)}_{0}\right)\right] -$$
$$-\sum_{\mathrm{j}:\mathrm{s}_\mathrm{i}\le\mathrm{s}_\mathrm{j}}\tilde{\mathbf{d}}^{(\mathrm{i})}_{\mathrm{ij}}\mathbf{A}^{\mathrm{iT}}\mathbf{F}^{(0)}_{\mathrm{j}},\ \mathrm{i}=1,\ldots\mathrm{n}. \quad (63)$$

$$\mathbf{M}'^{(0)}_{\mathrm{i}} = \mathbf{A}^{\mathrm{i}}\mathbf{M}'^{(\mathrm{i})}_{\mathrm{i}} \quad (64)$$

Кинематические уравнения

Кинематические уравнения

Для определения матриц $\mathbf{A}^{\mathrm{i}}$ необходимо к динамическим уравнениям добавить кинематические уравнения, связывающие производные параметров, определяющих ориентацию каждого тела с его угловой скоростью:

- углы Эйлера;
- углы Брайнта;
- кватернионные параметры;
- элементы матрицы поворота.

Кинематические уравнения для углов Брайнта (1-2-3)

Кинематические уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{\mathrm{i1}} \\ \dot{\alpha}_{\mathrm{i2}} \\ \dot{\alpha}_{\mathrm{i3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos\alpha_{\mathrm{i3}}}{\cos\alpha_{\mathrm{i2}}} & -\frac{\sin\alpha_{\mathrm{i3}}}{\cos\alpha_{\mathrm{i2}}} & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ -\cos\alpha_3\tan\alpha_2 & \sin\alpha_3\tan\alpha_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{ix}}^{(\mathrm{i})} \\ \omega_{\mathrm{iy}}^{(\mathrm{i})} \\ \omega_{\mathrm{iz}}^{(\mathrm{i})} \end{bmatrix}. \tag{65}$$

Матрица преобразования координат из базиса i в базис 0:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_2\mathrm{c}_3 & -\mathrm{c}_2\mathrm{s}_3 & \mathrm{s}_2 \\ \mathrm{c}_1\mathrm{s}_3 + \mathrm{s}_1\mathrm{s}_2\mathrm{c}_3 & \mathrm{c}_1\mathrm{c}_3 - \mathrm{s}_1\mathrm{s}_2\mathrm{s}_3 & -\mathrm{s}_1\mathrm{c}_2 \\ \mathrm{s}_1\mathrm{s}_3 - \mathrm{c}_1\mathrm{s}_2\mathrm{c}_3 & \mathrm{s}_1\mathrm{c}_3 + \mathrm{c}_1\mathrm{s}_2\mathrm{s}_3 & \mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 \end{bmatrix}. \tag{66}$$

где $\mathrm{s}_1 = \sin\alpha_{\mathrm{i1}}$, $\mathrm{s}_2 = \sin\alpha_{\mathrm{i2}}$, $\mathrm{s}_3 = \sin\alpha_{\mathrm{i3}}$, $\mathrm{c}_1 = \sin\alpha_{\mathrm{i1}}$, $\mathrm{c}_2 = \cos\alpha_{\mathrm{i1}}$, $\mathrm{c}_3 = \cos\alpha_{\mathrm{i3}}$.

Кинематические уравнения для углов Эйлера (3-1-3)

Кинематические уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_\mathrm{i} \\ \dot{\theta}_\mathrm{i} \\ \dot{\varphi}_\mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin\varphi_\mathrm{i}}{\sin\theta_\mathrm{i}} & \frac{\cos\varphi_\mathrm{i}}{\sin\theta_\mathrm{i}} & 0 \\ \cos\varphi_\mathrm{i} & -\sin\varphi_\mathrm{i} & 0 \\ -\sin\varphi_\mathrm{i}\operatorname{ctg}\theta_\mathrm{i} & -\cos\varphi_\mathrm{i}\operatorname{ctg}\theta_\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\mathrm{ix}^{(\mathrm{i})} \\ \omega_\mathrm{iy}^{(\mathrm{i})} \\ \omega_\mathrm{iz}^{(\mathrm{i})} \end{bmatrix}. \qquad (67)$$

Матрица преобразования координат из базиса i в базис 0:

$$\mathbf{A}^\mathrm{i} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_{\psi_\mathrm{i}}\mathrm{c}_{\varphi_\mathrm{i}} - \mathrm{s}_{\psi_\mathrm{i}}\mathrm{c}_{\theta_\mathrm{i}}\mathrm{s}_{\varphi_\mathrm{i}} & -\mathrm{c}_{\psi_\mathrm{i}}\mathrm{s}_{\varphi_\mathrm{i}} - \mathrm{s}_{\psi_\mathrm{i}}\mathrm{c}_{\theta_\mathrm{i}}\mathrm{c}_{\varphi_\mathrm{i}} & \mathrm{s}_{\psi_\mathrm{i}}\mathrm{s}_{\theta_\mathrm{i}} \\ \mathrm{s}_{\psi_\mathrm{i}}\mathrm{c}_{\varphi_\mathrm{i}} + \mathrm{c}_{\psi_\mathrm{i}}\mathrm{c}_{\theta_\mathrm{i}}\mathrm{s}_{\varphi_\mathrm{i}} & -\mathrm{s}_{\psi_\mathrm{i}}\mathrm{s}_{\varphi_\mathrm{i}} + \mathrm{c}_{\psi_\mathrm{i}}\mathrm{c}_{\theta_\mathrm{i}}\mathrm{c}_{\varphi_\mathrm{i}} & -\mathrm{c}_{\psi_\mathrm{i}}\mathrm{s}_{\theta_\mathrm{i}} \\ \mathrm{s}_{\theta_\mathrm{i}}\mathrm{s}_{\varphi_\mathrm{i}} & \mathrm{s}_{\theta_\mathrm{i}}\mathrm{c}_{\varphi_\mathrm{i}} & \mathrm{c}_{\theta_\mathrm{i}} \end{bmatrix}. \qquad (68)$$

где $\mathrm{s}_{\psi_\mathrm{i}} = \sin\psi_\mathrm{i}$, $\mathrm{s}_{\theta_\mathrm{i}} = \sin\theta_\mathrm{i}$, $\mathrm{s}_{\varphi_\mathrm{i}} = \sin\varphi_\mathrm{i}$, $\mathrm{c}_{\psi_\mathrm{i}} = \cos\psi_\mathrm{i}$, $\mathrm{c}_{\theta_\mathrm{i}} = \cos\theta_\mathrm{i}$, $\mathrm{c}_{\varphi_\mathrm{i}} = \cos\varphi_\mathrm{i}$.